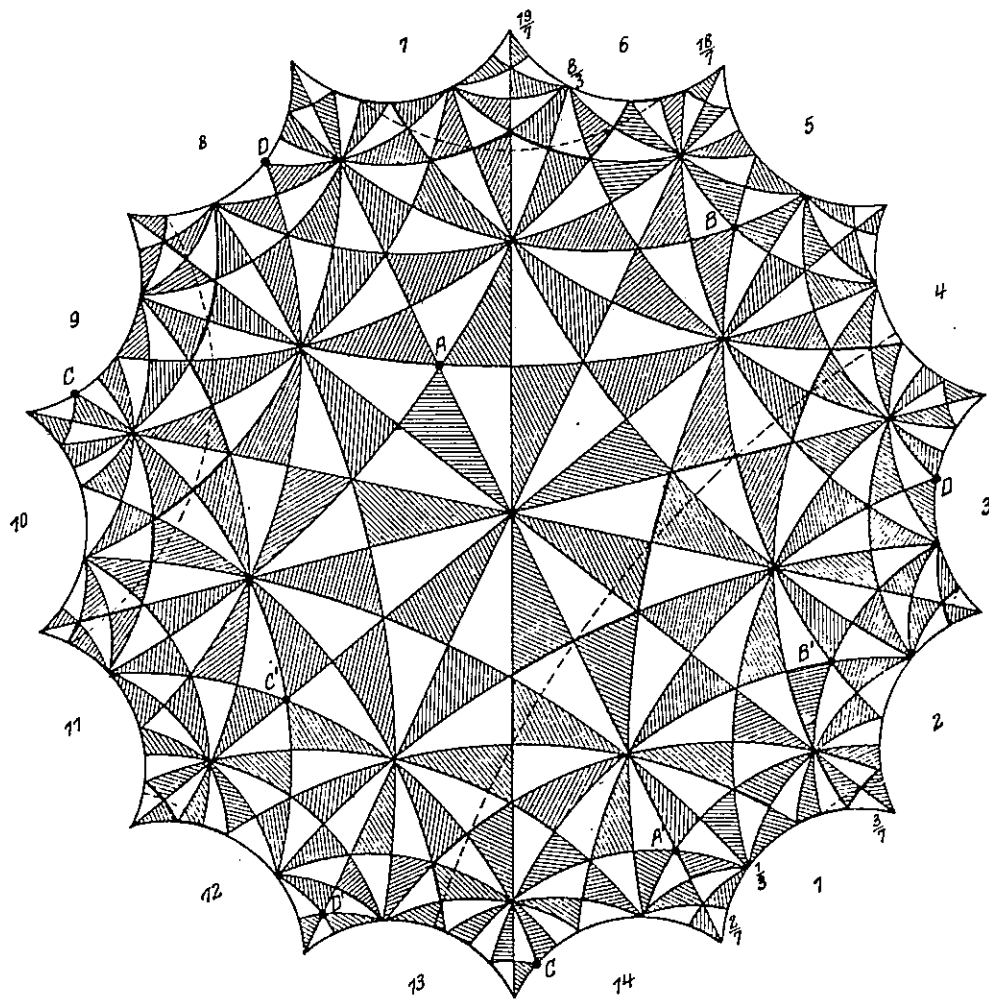


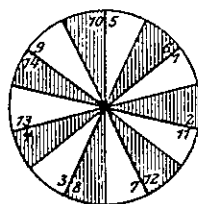
Representaties, Simpele singulariteiten en verder (voorlopige versie)



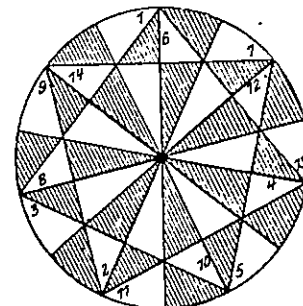
Hauptfigur.

Zusammengehörigkeit
der Kanten:

1	an	6
3	"	8
5	"	10
7	"	12
9	"	14
11	"	2
13	"	4



Ecken der einen Art.



Ecken der anderen Art.

Inhouds opgave.

I .	Singulariteiten van driehoekstype	
§1.	Fundamenteel groep	1
§2.	Voorbeelden	2
§3.	Driehoeksgroepen.	3
§4.	Simpele singulariteiten en driehoek singulariteiten.	8
§5.	Slotopmerkingen.	11.
II .	De Correspondentie van McKay.	13
§1.	Representatie grafen.	14
§2.	De Stelling van Gonzalez-Sprinberg en Verdier.	32
§3.	De constructie van H. Knörrer.	35
III.	De kromme van Klein.	50
§1.	Normale quasi-homogene oppervlakken	50
§2.	Modulaire krommen.	54
§3.	Theta-karakteristieken.	55
§4.	Irreducibele karakteren van $SL_2(P)$	59
§5.	De meetkunde van $PSL_2(7)$	62
§6.	Poincaré reeksen.	69
§7.	Slot opmerkingen.	77.

I. Singulariteiten van driehoekstype.

In dit hoofdstuk gaan we kort in op de bekende feiten die samenhangen met een speciale klasse van normale quasihomogene oppervlakte singulariteiten: de simpele singulariteiten en de andere singulariteiten van driehoekstype.

§ 1. Laat $(\tilde{X}, E) \xrightarrow{\pi} (X, 0)$ een goede resolutie van een normale oppervlakte singulariteit $(X, 0)$. Hierin is $E := \pi^{-1}(0)$ de exceptionele divisor. We schrijven $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ met E_i glad en irreducibel; $\text{Irr}(E) = \{E_i\}$ de verzameling van irreducibele componenten. De intersectie matrix $C = C_{ij} = (E_i \cdot E_j)$ is negatief definitief ([1]) en $C_{ii} < 0$; $C_{ij} = 0$ of 1 , $i \neq j$. De resolutie graaf (of diagram) is de graaf met $\{\text{punten}\} = \text{Irr}(E)$ en E_i verbonden met E_j slechts als $C_{ij} = 1$ $i \neq j$. Het getal $E_i \cdot E_i$ wordt boven het punt E_i gezet; -2 wordt weggelaten. Omdat E samenhangend is, is de resolutie graaf dat ook.

Laat K de link of omgevingsrand van $(X, 0)$ zijn.

De volgende bewering gaat terug op Mumford [1]:

bewering: Stel dat de resolutie graaf van $(\tilde{X}, E) \rightarrow (X, 0)$ boomvormig is, en alle E_i rationaal.

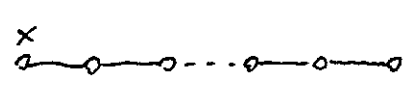
Een presentatie voor de fundamenteel groep $\pi_1(K)$ is dan:

$$\pi_1(K) = \langle S_i \ i=1, \dots, n \mid \prod_i S_i^{C_{ij}} = 1; S_i S_j^{C_{ij}} = S_j^{C_{ij}} S_i \rangle.$$

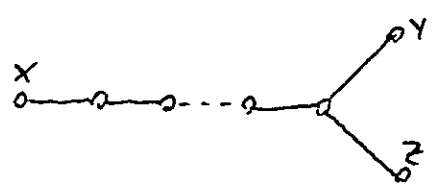
bewijs: zie [1].

Mark op dat dit onafhankelijk van de interpretatie als fundamenteelgroep een interessante manier is om aan een (symmetrische) matrix een groep toe te voegen. In het bijzonder is de groep invariant onder 'opblazen'.

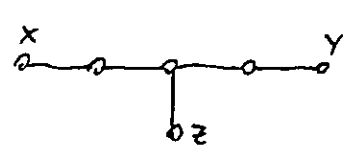
§2. Stel nu dat $C_{ii} = -2$; $C_{ij} = 0$ of 1 $i \neq j$. Het (samenhangend veronderstelde) diagram van een negatief definitieve matrix die hieraan voldoet is dan een Dynkin diagram van een irreducibel homogeen wortel systeem. Hieronder geven we presentaties van de bijbehorende groepen, waarbij we m.b.v. de Mumford relaties alles uitdrukken in de 'eindpunten' van het diagram.

Type A_n : 

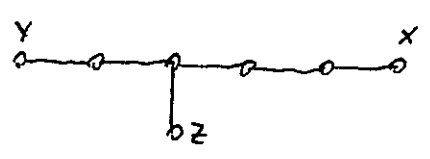
$$\pi_1 = \langle x \mid x^{n+1} = 1 \rangle$$

Type D_{n+2} : 

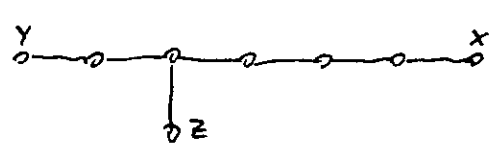
$$\pi_1 = \langle x, y, z \mid x^n = y^2 = z^2 = xyz \rangle$$

Type E_6 : 

$$\pi_1 = \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^2 = xyz \rangle$$

Type E_7 : 

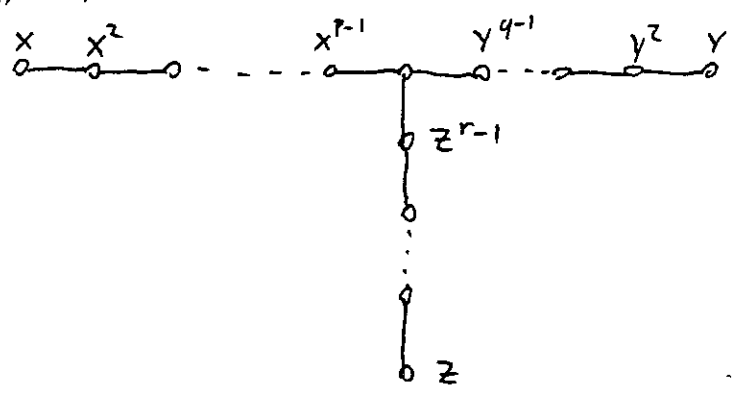
$$\pi_1 = \langle x, y, z \mid x^4 = y^3 = z^2 = xyz \rangle$$

Type E_8 : 

$$\pi_1 = \langle x, y, z \mid x^5 = y^3 = z^2 = xyz \rangle$$

Algemeen krijgt men natuurlijk voor een ster-
vormig diagram met drie armen ter lengte

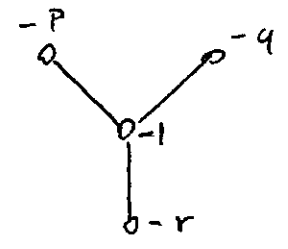
$p \geq q \geq r \geq 2$:



$T_{p,q,r}$

$$\pi_1 = \langle x, y, z \mid x^p = y^q = z^r = xyz \rangle$$

Dezelfde groep krijgt men bij het diagram



$\Lambda_{p,q,r}$

De intersectionmatrix is negatief definitief als:

voor $T_{p,q,r} \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ (de Platonische tripels)

voor $\Lambda_{p,q,r} \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ (hyperbolische tripels).

§3. De classificatie van enkelvoudig samenhangende Riemann oppervlakken is wel bekend (zie [2]):

We hebben de volgende mogelijkheden:

i) De Riemann sfeer $\mathbb{P}^1 \simeq S^2$; $\text{Aut}(\mathbb{P}^1) = \text{SO}_3(\mathbb{R})$

ii) Het Euclidische vlak $E \simeq \mathbb{C}$; $\text{Aut}(E) = \mathbb{R}^2 \ltimes \text{SO}_2(\mathbb{R})$

iii) Het Lobatchevskivlak $L = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$; $\text{Aut}(L) = \text{SU}(1,1)$

of het Poincaré halfvlak $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} z > 0\}$; $\text{Aut}(\mathcal{H}) = \text{PSL}_2(\mathbb{R})$

met $\text{Aut}(P)$ de groep van complex analytische automorfismen van de corresponderende klassieke 'meetkunde's'.

Voor elk drietal getallen α, β, γ ; $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ is er een driehoek Δ met hoeken α, β, γ gelegen in een van deze 3 vlakken. Deze driehoek ligt in TP' , E of H als $\alpha + \beta + \gamma - \pi > 0$; $= 0$ of < 0 resp. In het eerste en derde geval is een dergelijke driehoek uniek op automorfisme van P en een spiegeling, en heeft eindige oppervlakte =

We beschouwen nu de groep Σ^* voortgebracht door spiegelingen in de zijden van Δ en de ondergroep Σ_z van index $z \in \text{Aut}(P)$ (de z.g. driehoeksgroep). We beperken ons nu tot het geval $\alpha = \pi/p$, $\beta = \pi/q$, $\gamma = \pi/r$ $p, q, r \in \{2, 3, \dots\}$ en we noteren $\Sigma^* = \Sigma^*(p, q, r)$; $\Sigma_z = \Sigma_z(p, q, r)$; $\Delta = \Delta(p, q, r)$ etc.

Het volgende resultaat is klassiek:

Stelling: (Poincaré)

i) Δ is een fundamenteel gebied voor Σ^* (d.w.z. $\Delta \cap g\Delta \subset \partial\Delta$; $\bigcup_{g \in \Sigma^*} g\Delta = P$).

ii) Σ^* heeft een presentatie van de vorm:

$$\Sigma^*(p, q, r) = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_i^2 = 1; (\sigma_1 \sigma_2)^p = (\sigma_2 \sigma_3)^q = (\sigma_3 \sigma_1)^r = 1 \rangle.$$

iii) Σ_z heeft een presentatie van de vorm:

$$\Sigma_z(p, q, r) = \langle x, y, z \mid x^p = y^q = z^r = xyz = 1 \rangle$$

Hierin is σ_i spiegeling in de i -de zijde van Δ ; $i=1, 2, 3$

De hoek tussen zijde 1 en 2 is π/p etc.

Verder: $x = \sigma_1 \sigma_2$; $y = \sigma_2 \sigma_3$; $z = \sigma_3 \sigma_1$.

Voor een eenvoudig bewijs zie [2].

Een fundamenteel gebied voor Σ is bijvoorbeeld $\Delta \cup \sigma_1 \Delta$. [5]

Gevolg: $\Sigma^*(p, q, r)$ eindig $\Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$.

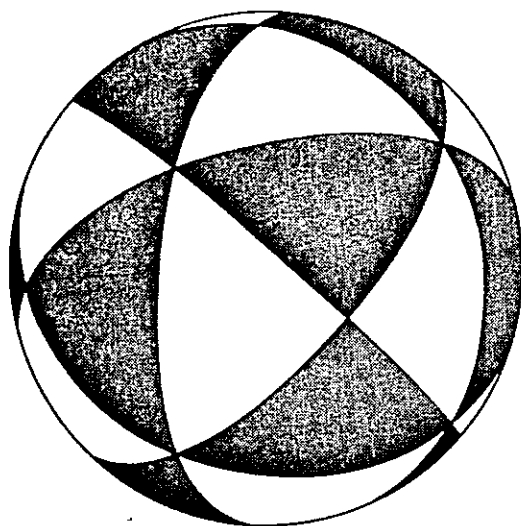
Immers, slechts dan ligt $\Delta(p, q, r)$ in $\mathbb{P}^1$. Het aantal elementen van $\Sigma^*(p, q, r)$ is dan $4 / (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1)$, hetgeen direct uit vergelijking van oppervlakte van Δ en $\mathbb{P}^1$ volgt.

De groep $\Sigma^*(p, q, r)$ is dus de Coxetergroep $\begin{smallmatrix} p & & r \\ & \triangle & \\ q & & \end{smallmatrix}$, van compact hyperbolisch type indien $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ (zie [3]).

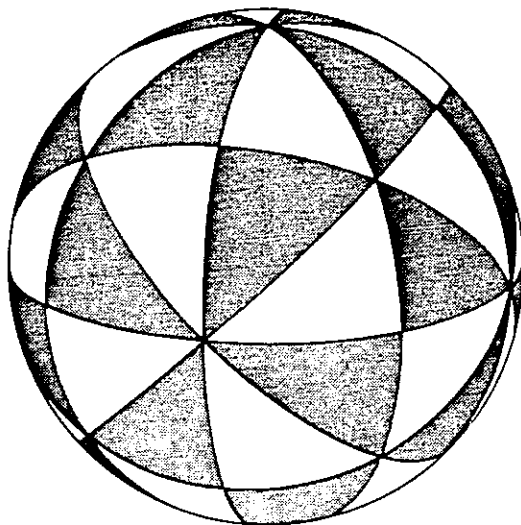
De overdekking van $\mathbb{P}^1$ met driehoeken is een fraai gezicht. In het elliptische geval hebben we de volgende mogelijkheden: (zie [4])

$$\# \Sigma^*(p, 2, 2) = 4p$$

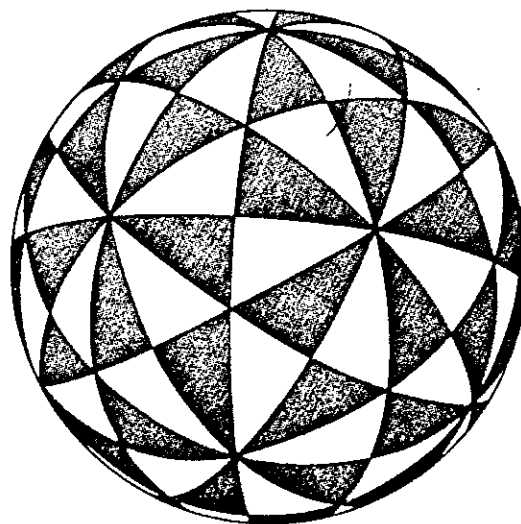
$$\# \Sigma^*(3, 3, 2) = 24$$



$$\# \Sigma^*(4,3,2) = 48$$



$$\# \Sigma^*(5,3,2) = 120$$



In de laatste 3 gevallen is de groep Σ^* de symmetrie groep van een regelmatig veelvlak in $\mathbb{R}^3$. De corresponderende rotatie groepen Σ noemen we de (zuivere) polyeder groepen.

In alle gevallen werkt $\Sigma(p,q,r)$ vrij op P , buiten de hoekpunten van de driehoeken. De hoekpunten vallen uiteen in drie banen onder de groep. De stabilisator van een punt in zo'n speciale baan is een cyclische groep van orde p , q of r .

Het quotient P/Σ is $\mathbb{P}^1$ en de canonieke projectie

$P \longrightarrow P/\tilde{\Sigma} = \mathbb{P}^1$ vertakt boven 3 punten, in de punten van de speciale banen.

lemma: Laat $\tilde{\text{Aut}}(P)$ de universele overdekking van $\text{Aut}(P)$ en $\tilde{\Sigma}$ het inverse beeld onder de canonieke projectie van $\tilde{\Sigma}$. We hebben dan:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{i)} & 1 \longrightarrow & \tilde{\Sigma} & \longrightarrow & \tilde{\text{Aut}}(P) & \longrightarrow & \text{Aut}(P) \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & \tilde{\Sigma} & \longrightarrow & \tilde{\Sigma} \longrightarrow 1 \end{array} \quad \text{exact.}$$

i) $\tilde{\Sigma}$, het centrum, is $\mathbb{Z}/2$ als $P = \mathbb{P}^1$, $\mathbb{Z}$ als $P = E$ of H .

ii) $\tilde{\Sigma}$ heeft een presentatie van de vorm:

$$\tilde{\Sigma}(p, q, r) = \langle x, y, z \mid x^p = y^q = z^r = xyz \rangle.$$

Het bewijs is niet moeilijk (zie [2]).

De groepen $\tilde{\Sigma}(p, q, r)$ heten de uitgebreide driehoeks groepen, in het elliptische geval ook wel binair polyeder groepen.

Dus dan $\tilde{\Sigma} \subset \text{SU}_2(\mathbb{C}) \simeq S^3$. Wanneer we de cyclische groepen $\mathbb{Z}/n$ via $\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$ $\zeta^n = 1$ in $\text{SU}_2(\mathbb{C})$ dan verkrijgt men zo

alle eindige ondergroepen van SU_2 (zie [5]). Een eindige ondergroep van $\text{SU}_2(\mathbb{C})$ noemen we een binair groep.

Die 120 elementen van $\tilde{\Sigma}(5, 3, 2)$ in S^3 vormen de hoekpunten van de regelmatige 600-cel $\{3, 3, 5\}$, de 24 elementen van $\tilde{\Sigma}(3, 3, 2)$ de hoekpunten van de 24-cel $\{3, 4, 3\}$ en de 48 elementen van $\tilde{\Sigma}(4, 3, 2)$ de hoekpunten van twee duale 24-cellen, ofwel de projectie van het wortel systeem F_4 in S^3 . (zie [4]).

§ 4. Simpele singulariteiten en driehoeks singulariteiten

De uitgebreide driehoeksgroepen $\Sigma = \pi_1(\tilde{\text{Aut}} P/\Sigma) = \pi_1(\text{Aut } P/\Sigma)$ uit § 3 zijn blijkbaar isomorf met de groepen die we in § 2 bij de diagrammen T_{pqr} en Λ_{pqr} tegenkwamen.

We zullen nu in het elliptische geval en het hyperbolische geval een singulariteit construeren met:

- i) De minimale goede resolutie heeft een graaf van type T_{pqr} of Λ_{pqr}
- iii) De link K is diffeomorf met $\text{Aut } P/\Sigma$.

A. Elliptische geval ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$).

Laat $L = \text{Tot}(\mathcal{O}(-2))$ de coraakbundel aan $\mathbb{P}^1$; L^* het complement van de nulsnede en $M := L^*/\mathbb{R}^+$ (evidente $\mathbb{R}^+$ actie op L^* , afkomstig van $\mathbb{C}^*$ actie op de vezels van L).

De groep $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ werkt op natuurlijke wijze op L , L^* en M . De werking op L^* is vrij, op M vrij en transitief dus $M \cong \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$. De groep Σ werkt vrij buiten de 3 speciale banen op $\mathbb{P}^1$ en het quotient $QL = L/\Sigma$ is een oppervlak met 3 singulariteiten, van cyclische quotient type $(p, p-1)$, $(q, q-1)$, $(r, r-1)$. Minimale resolutie van deze singulariteiten levert een $T_{p,q,r}$ -diagram; de centrale kromme correspondeert met de strikt getransformeerde van $\mathbb{P}^1/\Sigma = \mathbb{P}^1 \subset QL$. Samen trekken van deze $\mathbb{P}^1 \subset QL$ geeft een oppervlak X met geïsoleerd singulier punt o , met resolutie-graaf $T_{p,q,r}$ en link $K \cong X - o / \mathbb{R}^+ = (L^*/\Sigma)/\mathbb{R}^+ = M/\Sigma = \text{Aut } \mathbb{P}^1/\Sigma$.

Laat nu C een gladde projectieve kromme over $\mathbb{C}$ en $\mathcal{L}$ een lijnbundel op C (= lokaal vrij $\mathcal{O}_C$ -moduul van rang 1). Een sectie $s \in H^0(C, \mathcal{L})$ is op te vatten als een functie op $L = \text{Tot}(\mathcal{L}^{-1})$, lineair in de vezels:

$$s \longmapsto \tilde{s}: \text{Tot}(\mathcal{L}^{-1}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, \ell) \longmapsto \langle s(x), \ell \rangle$$

Als $\mathcal{L}$ ampel is, dan heeft L negatieve zelfintersectie. De ruimte CL die ontstaat door het samen trekken van de nul snede heeft de structuur van affiene variëteit, gegeven door $CL = \text{Spec}(\bigoplus_{k=0}^{\infty} H^0(C, \mathcal{L}^k))$

Hierboven hadden we $C = \mathbb{P}^1$; $\mathcal{L} = \mathcal{O}(2)$. Onze singulariteit krijgt nu de structuur van een normale affiene oppervlakte singulariteit $CL/\Sigma = \text{Spec}((\bigoplus H^0(\mathcal{O}(2))^{\Sigma}))$.

De actie van Σ op L is te liften naar een actie van Σ op $L' = \text{Tot}(\mathcal{O}(-1))$. De ruimte CL' is isomorf met $\mathbb{C}^2$ en de singulariteit $(x, 0)$ verschijnt nu als het quotient $\mathbb{C}^2/\Sigma$, met affiene coördinaten ring $\mathbb{C}[z_1, z_2]^{\Sigma}$. Een singulariteit van de vorm $\mathbb{C}^2/G$ met G een binaire groep heet een simpele singulariteit. De ring van G -invariante polynomen wordt voortgebracht door 3 elementen, die $\mathbb{C}^2/G$ als hyperoppervlakte in $\mathbb{C}^3$ inbedden. De resolutie graaf van $\mathbb{C}^2/G$ met $G = \mathbb{Z}/n$ is het Dynkin diagram van type A_{n-1} . We zien nu dat de binaire groepen precies corresponderen met Dynkin

diagrammen van type A, D of E. Voor de binaire groepen zijn de volgende notaties in omloop:

$$\Sigma(p, q, r) = \langle p, q, r \rangle ; \text{ (zie [43]) } \quad \text{en}$$

$$\mathbb{Z}/n, \quad \mathbb{D}_n = \Sigma(n, 2, 2); \quad \Pi = \Sigma(3, 3, 2); \quad \textcircled{0} = \Sigma(4, 3, 2); \quad \textcircled{1} = \Sigma(5, 3, 2)$$

(resp. cyclisch, binair dihedraal, tetrahedraal, octahedraal en binair icosaedraal).

B. Hyperbolische geval ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$).

De constructie is bijna geheel analoog. Nu nemen we echter $L =$ raakbundel aan H , met canonieke $\text{Aut}(H)$ actie. Door nu eerst een vrij werkende groep N van eindige index in Σ uit te delen krijgen we een gladde projectieve kromme $e = H/N$ van algemeen type (d.i. Ω_e^1 ampel, ofwel $g(e) > 1$). Door nu de actie van $G = \Sigma/N$ op $L' = \text{Tot}(\Omega_e^{-1}) = TE$ uit te delen krijgen we een oppervlak met 3 singuliere punten, nu echter van type $(p, p) (q, q) (r, r)$. Minimale resolutie geeft nu een $\Lambda_{p,q,r}$ -diagram. Door $e/G = P' \subset QL' = L'/G$ samen te trekken krijgen we een oppervlak met geïsoleerd singulier punt o. met affiene coördinaten ring $(\oplus H^0(e, \Omega_e^k))^G$, ofwel de algebra van Σ automorfe vormen op H . (zie [6]).

De singulariteit heet de driehoekssingulariteit van type (p, q, r) .

Deze singulariteiten zijn i.h.a. vrij 'wild'; slechts voor 14 tripels krijgen we hyper oppervlakken (zie [6]) en voor $p+q+r > 22$ zijn deze 'non-smoothable'. (zie [7]).

§5. Slot opmerkingen.

Laat $\mathcal{C}$ een gladde projectieve kromme over $\mathbb{C}$, $\mathcal{L}$ een ampel lijnbundel op $\mathcal{C}$, en G een groep van bundelautomorfismen. Zij $L = \text{Tot}(\mathcal{L}^{-1})$. Beschouw onderstaand diagram:

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{X} & & E_0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ L & \longrightarrow & QL & ; & \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E} & ; \{Q_i\} \longrightarrow P_i \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ CL & \longrightarrow & X & & o \longrightarrow o \end{array}$$

Horizontale pijlen zijn 'uitdelen naar G '; verticale pijlen zijn contracties. (vgl. vorige §). De afbeelding $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/G = \mathcal{E}$ vertaalt boven $P_i \in \mathcal{E}$ in punten Q_{ij} , $j=1, \dots, k$, Galois, met groep G . $X = \text{Spec}(\oplus H^0(\mathcal{C}, \mathcal{L}^k)^G)$ heeft de structuur van een normale affiene oppervlakte singulariteit, met een 'goede $\mathbb{C}^*$ -actie' (zie [8]). De minimaal goede resolutie van X heeft een stervormig diagram. De centrale kromme is de strikt getransformeerde van $\mathcal{E}$ in $\tilde{X}$. Voor elk punt $P_i \in \mathcal{E}$ krijgen we een tak in het diagram door een zekere cyclische quotient singulariteit op te lossen. De irreducibele componenten van $E \neq E_0$ zijn P_i 's met zekere zelfintersecties.

Stelling: (Pinkham, Dolgachev):

- i) Elke normale z -dimensionale oppervlakte singulariteit met goede $\mathbb{C}^*$ -actie is zo te verkrijgen.
- ii) Gegeven de resolutie data (d.i.:

$\underline{\alpha}$. de (gelabelde) resolutie graaf; $\underline{\beta}$. het analytisch type van de centrale kromme E_0 ; $\underline{\gamma}$. de ligging van de punten P_i in $\underline{\delta}$. de normaal schoof N van E_0 in $\tilde{X}$) dan is er een unieke quasihomogene normale oppervlakte singulariteit met deze resolutie data, gesteld dat de intersectiematrix negatief definitief is.

bewijs: zie [6], [8] en [9].

Natuurlijk is de voorstelling als $\text{Spec}(\oplus H^0(\mathcal{O}, \mathcal{L}^k)^G)$ niet uniek. Zo is $\mathbb{C}^2/G$ met $L = \text{Tot}(\mathcal{O}(n))$ en $G \cong \mathbb{Z}/n$, actie via $\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \bar{\zeta} \end{pmatrix}$ $\zeta^n = 1$.

II. De Correspondentie van McKay.

De opmerking van J. McKay [10] is ondermeer het volgende: Voor een binaire groep $G \hookrightarrow SU_2(\mathbb{C})$ is de matrix $C = 2\mathbb{1} - A$ (met A de decompositie matrix van de canonieke 2-dimensionale representatie ρ in $\mathbb{C}^2$) gelijk aan de Cartan-matrix van het affiene Dynkin diagram 'dat bij G hoort'. (zie I. §). In feite is deze opmerking de formulering van een nieuw probleem: vindt een 'goede' verklaring voor dit verschijnsel. Als zodanig wordt dit probleem een onderdeel van het algemene A-D-E probleem (zie [11]).

In dit hoofdstuk zal gepoogd worden een schets te geven van een meetkundige constructie, die aan elke representatie ρ van G een divisor $\pi(\rho)$ op de minimale resolutie van de simpele singulariteit $\mathbb{C}^2/G$ toevoegt.

In §1. worden enkele algemeenheden over representatie-grafen en decompositie matrices besproken, alsmede een verklaring van McKay's opmerking, afkomstig van Steinberg. §2. bevat de formulering van 'de Stelling van Gonzalez-Springer & Verdier' [12]. §3. is een schets van de constructie van H. Knörrer [13].

§1. Representatie grafen.

§1.1 ; Laat G een eindige groep zijn, $\text{Irr}(G)$ de verzameling van irreducibele (complexe) representaties, die we met $\rho_1, \dots, \rho_m$ ($m = \# \text{Irr}(G) = \# \text{Conj}(G) =$ aantal conjugatie klassen van G) zullen aangeven. $R(G)$ is de ring van virtuele representaties van G .

Zij nu θ een willekeurige representatie van G .

Het tensor product $\theta \otimes \rho_i$, $\rho_i \in \text{Irr}(G)$ valt i.h.a. uiteen in verschillende irreducibele componenten ρ_j , met zekere multipliciteiten.

We schrijven: $\theta \otimes \rho_j = \sum a_{ij} \cdot \rho_i$.

De matrix (a_{ij}) noemen we de decompositie matrix van θ .

Laat nu $V_{\mathbb{Z}} = R(G)$ opgevat als $\mathbb{Z}$ -module.

In $V_{\mathbb{Z}}$ hebben we een natuurlijke basis $\text{Irr}(G)$, orthonormaal t.o.v. het inproduct $\langle , \rangle$, met $\langle \psi, \varphi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\psi}(g) \chi_{\varphi}(g^{-1})$ (χ_{ψ} het karakter van ψ).

Voor een $\theta \in R(G)$ hebben we een endomorfisme van $V_{\mathbb{Z}}$:

$A^{\theta} : V_{\mathbb{Z}} \rightarrow V_{\mathbb{Z}} ; \varphi \mapsto \theta \otimes \varphi$. Het is duidelijk dat deze

A^{θ} 's combineren tot een morfisme van ringen:

$$A : R(G) \rightarrow \text{End}(V_{\mathbb{Z}}) ; \theta \mapsto A^{\theta}$$

De matrix van A^{θ} t.o.v. de natuurlijke basis $\text{Irr}(G)$ is precies de decompositie matrix van θ :

$$A^{\theta}_{ij} = a_{ij} = \langle \theta \otimes \rho_j, \rho_i \rangle$$

§ 1.2; We vermelden nu enkele voor de hand liggende eigenschappen van de matrices A^θ_{ij} .

1.2.1. De matrix van A^θ is i.k.a. niet symmetrisch.

Wel hebben we het volgende:

$$\alpha: A^\theta_{ij} = \langle \theta \otimes \rho_j | \rho_i \rangle = \langle \theta \otimes \bar{\rho}_i | \bar{\rho}_j \rangle = A^\theta_{\bar{j} \bar{i}} \quad \text{met } \bar{\rho}_i = \rho_{\bar{i}}$$

(Voor een representatie ψ zetten we $\bar{\psi}$ voor de duale representatie; dus $\bar{\psi}(g) = \psi(g^{-1})^T$).

$$\beta: A^{\bar{\theta}}_{ij} = \langle \bar{\theta} \otimes \rho_j | \rho_i \rangle = \overline{\langle \theta \otimes \rho_j | \rho_i \rangle} = \langle \theta \otimes \bar{\rho}_j | \bar{\rho}_i \rangle = \langle \theta \otimes \rho_i | \rho_j \rangle$$

$$\text{Dus: } A^{\bar{\theta}} = (A^\theta)^T$$

Omdat A injectief is volgt nu:

$$\theta = \bar{\theta} \iff A^\theta \text{ symmetrisch.}$$

1.2.2. Uit $\theta \otimes \rho_j = \sum a_{ij} \rho_i$ volgt door sporen nemen:

$$\chi_\theta(x) \cdot \chi_j(x) = \sum a_{ij} \chi_i(x)$$

Blijkbaar is de vector $\delta_x := \sum \chi_i(x) \rho_i$ voor $x \in \text{Conj}(G)$

simultane (linker) eigen vector voor alle operatoren A^θ .

De overeenkomstige eigenwaarde is $\chi_\theta(x)$.

Wegens 1.2.1 zijn de δ_x ook (rechter) eigen vectoren, maar

dan met eigenwaarde $\bar{\chi}_\theta(x) = \chi_\theta(x^{-1})$

Dus: δ_x rechter eigen v. van A^θ met eigenw. $\bar{\chi}_\theta(x)$

δ_x linker " " " " " $\chi_\theta(x)$

Dit is een aardige interpretatie van de karakter tabel van G .

Als voor een reële $\theta \in R(G)$ de afbeelding $x \mapsto \chi_\theta(x)$

$x \in \text{Conj}(G)$ injectief is, dan is de kennis van A^θ

equivalent met kennis van de gehele karakter tabel.

Zo'n A^θ bepaalt dus ook alle andere decompositie-matrices.

Mark op: δ_x is zowel linker als rechter eigenvector bij dezelfde eigenwaarde $\Leftrightarrow \chi_\theta(x) \in \mathbb{R}$. De vector $\delta_1 = \sum \chi_i(1) p_i = \sum d_i p_i$ ($d_i = \deg(p_i)$) = Reg = reguliere-representatie heeft deze eigenschap voor alle θ en alle G .
 Verder: $\langle \delta_x | \psi \rangle = \psi(x)$ en dus: $A^{\delta_x}_{ij} = (\chi_i(x) \bar{\chi}_j(x))$ en $A^{\text{Reg}}_{ij} = (d_i \cdot d_j)$

1.2.3. Laat Γ_θ de graaf zijn, eventueel met labels pijlen en loops (= 'zelfintersecties'), die op de gebruikelijke wijze uit de matrix A^θ_{ij} ontstaat. We hanteren de gebruikelijke conventies betreffende weglaten van labels en pijlen ($\overset{1}{\longrightarrow} = \longrightarrow$; $\longrightarrow = \curvearrowright$; $\bigcirc = \bigcirc$)
 We noemen Γ_θ de representatie graaf van θ .

Dan geldt, o.m. omdat elke irreducibele representatie in een tensormacht van een trouw representatie opgaat (zie [15]):

Γ_θ samenhangend $\Leftrightarrow \theta$ is trouw.

We werken nu, om deze feiten te illustreren een eenvoudig voorbeeld uit:

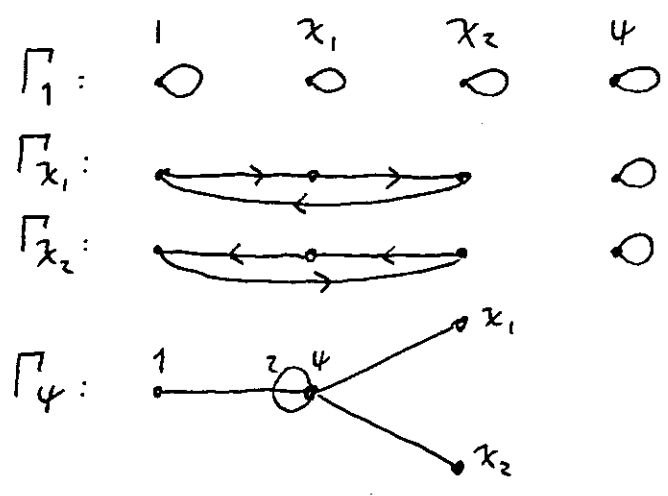
d. $G = A_4$, de alternerende groep op 4 elementen.

De karakter tabel is:

De graaf is:

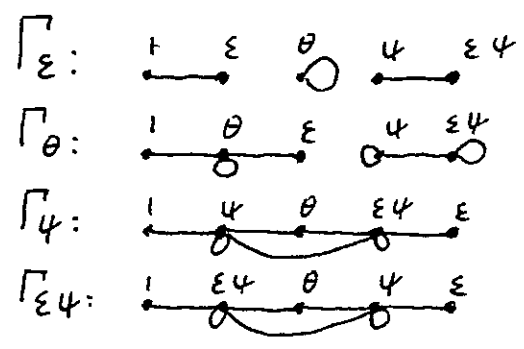
#		1	χ_1	χ_2	ψ
1	1	1	1	1	3
3	a	1	1	1	-1
4	b	1	ω	ω^2	0
4	c	1	ω^2	ω	0

$(\omega = e^{2\pi i/3})$



B. $G = S_4$, de symmetrische groep op 4 elementen.

#		1	ϵ	θ	ψ	$\epsilon\psi$
1	1	1	1	2	3	3
6	(ab)	1	-1	0	1	-1
3	(ab)(cd)	1	1	2	-1	-1
8	(abc)	1	1	-1	0	0
6	(abcd)	1	-1	0	-1	1



1.2.4. Bovenstaande voorbeelden roepen de vraag op wat het verband is tussen de grafen van de representaties van G en die van een ondergroep H . In het algemeen is dit natuurlijk minstens zo moeilijk als het verband tussen $R(H)$ en $R(G)$. We zullen nu het geval $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1$ wat nader bekijken.

We herinneren de lezer aan de volgende feiten (zie [15]):

Laat $d: H \rightarrow G$ een morfisme van groepen. Zo'n d

induceert: $d^*: R(G) \rightarrow R(H)$ (restrictie; Res)

(homomorfisme van ringen)

en $d_*: R(H) \rightarrow R(G)$ (inductie; Ind)

(homomorfisme van groepen).

Dit is functorieel en verder:

$$\langle d_* \psi | \varphi \rangle_G = \langle \psi | d^* \varphi \rangle_H \quad (\text{"Frobenius"})$$

$$\langle d_* \psi \rangle \otimes \varphi = d_* (\psi \otimes d^* \varphi) \quad (\text{Projectie formule}).$$

Voor $i: H \hookrightarrow G$ schrijft men $i^* = \text{Res}_H^G = \text{Res}$; $i_* = \text{Ind}_H^G = \text{Ind}$.

Stel nu: $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$ exact. We hebben dan een actie $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(R(H)); s \mapsto \rho^s$; $\rho^s(x) = \rho(s^{-1}xs)$

Ergeldt dan: $\text{Res Ind } \rho = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \rho^s$ (Mackey decompositie)

Hieruit volgt o.a.: $\text{Ind } \rho$ irreducibel $\Leftrightarrow \langle \rho | \rho^s \rangle = 0 \quad s \neq 1$.

('Criterium van Mackey').

Laat nu $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1$ een exacte rij.

We schrijven ρ^s voor de ρ^s $s \in \mathbb{Z}/2$ $s \neq 1$

Men gaat eenvoudig na dat $\text{Ind } 1 = 1 + \varepsilon$; $\deg(\varepsilon) = 1$

$\varepsilon \neq 1$; $\varepsilon^2 = 1$; $\text{Res } \varepsilon = 1$.

Merk op: $\rho \in \text{Irr}(G) \Leftrightarrow \varepsilon \otimes \rho =: \varepsilon \rho \in \text{Irr}(G)$.

Met behulp van bovenstaande feiten bewijst men eenvoudig het volgende lemma (zie [16], ook voor een bewijs.):

lemma: Laat $\rho \in \text{Irr}(H)$. Dan geldt:

$$1) \text{Ind } \rho = \text{Ind } \rho^\vee = \varepsilon \text{Ind } \rho$$

$$2) \text{Ind } \rho = \begin{cases} \rho' \in \text{Irr}(G) & \Leftrightarrow \rho \neq \rho^\vee \\ (1+\varepsilon)\rho'; \rho' \in \text{Irr}(G) & \Leftrightarrow \rho = \rho^\vee \end{cases}$$

Laat $\varphi \in \text{Irr}(G)$. Dan geldt:

$$1) \text{Res } \varphi = \text{Res } \varepsilon \varphi = \text{Res } \varphi^\vee$$

$$2) \text{Res } \varphi = \begin{cases} \rho \in \text{Irr}(H) & \Leftrightarrow \varphi \neq \varepsilon \varphi \\ \rho + \rho^\vee; \rho \in \text{Irr}(H) & \Leftrightarrow \varphi = \varepsilon \varphi \end{cases}$$

Laat nu θ een irreducibele representatie van G en zij

$\psi = \text{Res } \theta$ (ook irreducibel), dus $\psi = \psi^\vee$.

In het algemeen geldt: $\langle \varphi \otimes \rho | \chi^\vee \rangle = \langle \varphi^\vee \otimes \rho^\vee | \chi \rangle$

Dus: $\varphi \otimes \rho_i = \sum a_{ji} \rho_j \Leftrightarrow \varphi \otimes \rho_i^\vee = \sum a_{ji} \rho_j^\vee$

M.a.w: de involutie $\rho \leftrightarrow \rho^\vee$ werkt 'incidentie bewarend' op Γ_ψ .

Zij nu $\pi_H: \Gamma_\psi \rightarrow \Gamma_\psi(H, G)$ de quotient afbeelding; $\Gamma_\psi(H, G)$

is de quotientgraaf (d.i. $\pi_H \rho$ en $\pi_H \varphi$ worden door

$$\sum_{x \in \pi^{-1} \pi \varphi} \langle \psi \otimes \rho | x \rangle = \sum_{y \in \pi^{-1} \pi \rho} \langle \psi \otimes y | \varphi \rangle \text{ lijnen verbonden}).$$

Anderzijds hebben we voor de $\rho_i \in \text{Irr}(G)$:

$$\theta \otimes \rho_i = \sum b_{ji} \rho_j \Leftrightarrow \theta \otimes \varepsilon \rho_i = \sum b_{ji} \varepsilon \rho_j$$

Dus ook $\varepsilon \otimes$ werkt incidentie bewarend. Geheel analoog

hebben we een $\pi_G: \Gamma_\theta \rightarrow \Gamma_\theta(G, H)$, met intersecties

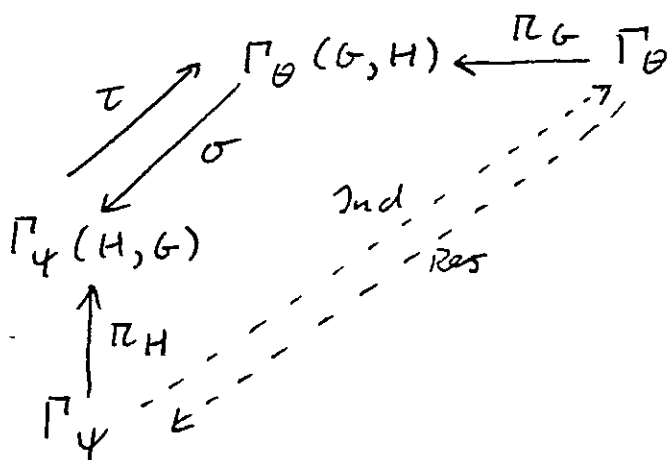
in $\Gamma_\theta(G, H)$ analoog als boven gedefinieerd.

Aan een punt t in $\Gamma_\psi(H, G)$ vegen we een punt in $\Gamma_\theta(G, H)$ toe, als volgt: Zij $p \in \text{Irr}(H)$ representant v. $\pi_H p \in \Gamma_\psi(H, G)$. Als $p \neq p^\vee$ dan $\text{Ind } p =: p' \in \text{Irr}(G)$ volgens het lemma; Zet dan $\tau: \pi_H p \mapsto \pi_G p'$. Als $p = p^\vee$ dan $\text{Ind } p = p' + \varepsilon p'$ $p' \in \text{Irr}(G)$; zet dan weer $\pi_H p \mapsto \pi_G p'$. Dit definieert een afbeelding $\tau: \Gamma_\psi(H, G) \rightarrow \Gamma_\theta(G, H)$. Analogie hebben we een inverse $\sigma: \Gamma_\theta(G, H) \rightarrow \Gamma_\psi(H, G)$. De zaak is nu zo ingericht dat:

bewering: σ en τ zijn isomorfismen van grafen.

bewijs: triviaal $\square$.

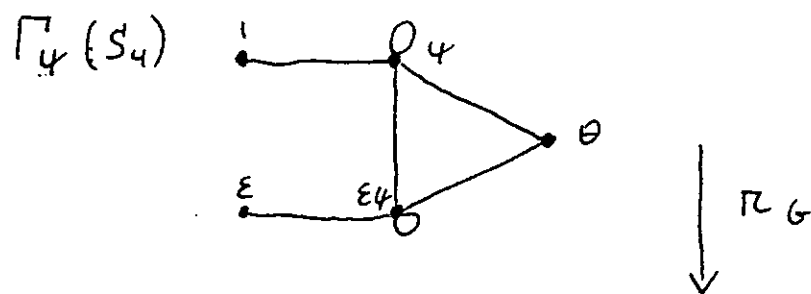
We hebben dus:



De grafen Γ_ψ en Γ_θ verschijnen dus als 'overdekking' van een gemeenschappelijke tussen graaf.

Merk op: $\pi_G^{-1} \circ \tau \circ \pi_H(p) = \{ \text{verz. } p' \in \text{Irr}(G) \text{ in } \text{Ind } p \}$
 $\pi_H^{-1} \circ \sigma \circ \pi_G(p') = \{ p \in \text{Irr}(H) \text{ in } \text{Res } p' \}$

We illustreren dit weer met $1 \rightarrow A_4 \rightarrow S_4 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1$ en de representatie $\psi \in \text{Irr}(S_4)$. $\text{Res } \psi \in \text{Irr}(A_4)$ heet 'toevallig' ook ψ .



Merk op dat hier $\chi_1^V = \bar{\chi}_1 = \chi_2$; dat is wel vaker zo.

We zien dus dat voor $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1$ het verband tussen de grafen van H en G zeer eenvoudig door Res en Ind beschreven wordt.

§ 1.4. Laat nu θ een vaste representatie van G zijn, en zij $d = \deg(\theta) = \chi_\theta(1)$.

We zetten nu op de ruimte $V = V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \otimes V_{\mathbb{C}}$ een bilineaire vorm $(\ , \)$ door voor de basisvectoren $p_i \in \text{Irr}(G)$ te definiëren: $(p_i, p_j) = d \cdot \mathbb{1}_{ij} - A_{ij}^\theta =: C_{ij}$

Volgens 1.2.2 geldt: $x \in \langle \text{Reg} \rangle_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow (x, y) = (y, x) = 0 \ \forall y \in V$.

Zet nu $V_\ell^\perp = \{x \in V \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in V\}$; $V_r^\perp = \{x \in V \mid (y, x) = 0 \ \forall y \in V\}$

$V^\perp = \{x \in V \mid (x, x) = 0\}$; duidelijk is: $\langle \text{Reg} \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq V_\ell^\perp, V_r^\perp \subseteq V^\perp$

Lemma: $(\ , \)$ is positief semi definit.

Als θ trouw is, dan $V^\perp = \langle \text{Reg} \rangle_{\mathbb{R}}$ en omgekeerd.

bewijs: is eenvoudig, zie bijv [1]. □

Laat nu $s_i(x) = x - 2 \frac{(x, p_i)}{(p_i, p_i)} \cdot p_i$ de

spiegeling in het hypervlak loodrecht op de vector p_i .
 Direkte berekening leert:

$$s_i(\delta_x) = \delta_x + \{ \chi_\theta(x) - \chi_\theta(1) \} \chi_i(x) \cdot p_i$$

met $\delta_x = \sum \chi_i(x) \cdot p_i \in V_{\mathbb{C}}$.

Hieruit zien we:

i) $\text{Reg} = \delta_1$ is invariant onder alle s_i en:

θ trouw $\Leftrightarrow \text{Reg}$ is de enige vector die hieraan voldoet
 (Dit geeft een ander bewijs voor het lemma).

ii) Voor trouwe θ ligt de vector δ_x in de hyper-
 vlakken loodrecht op de p_i voor precies die $i \in \{1, \dots, m\}$
 met $\chi_i(x) = 0$

Op de ruimte $\tilde{V} := V/V^\perp$ hebben we nu een
 positief definitie bilineaire vorm, die we weer met
 $(,)$ zullen aanduiden, net zoals we de projecties
 van de $p_i \in \text{Irr}(G)$ in $\tilde{V}$ gewoon p_i blijven noemen.

Merk op: in $\tilde{V}$ geldt: $-p_1 = \sum_{i \neq 1} d_i p_i$ met $p_1 = 1$ triviale
 representatie.

De spiegelingen s_i in $\tilde{V}$ laten echter i.h.a. $\pm \text{Irr}(G)$
 niet invariant, dus krijgen we i.h.a. geen wortelsysteem.

§ 1.5. We zullen nu laten zien, dat voor een
 binaire groep $G \xrightarrow{c} SU_2(\mathbb{C})$ de matrix
 $C = z\mathbb{1} - A^c$ de Cartan matrix is van een affien irreducibel
 homogeen Dynkin diagram $\Gamma_c(G)$. De $\beta_i \ i \neq 1 \in \text{Irr}(G)$
 vormen in $\tilde{V}$ een simpel systeem van wortels voor het
 bijbehorende wortelsysteem.

We veronderstellen $G \neq \{1\}, \neq \{\pm 1\}$.

lemma: Laat C_{ij} de matrix van $C = z\mathbb{1} - A^c$.

Dan: i) $C_{ij} = C_{ji} \quad \forall i, j \quad (a_{ij} = a_{ji})$

ii) $C_{ii} = z \quad \forall i \quad (a_{ii} = 0)$

iii) $C_{ij} = 0 \text{ of } -1 \quad \forall i \neq j \quad (a_{ij} = 0 \text{ of } 1)$.

bewijs: i) Omdat $G \xrightarrow{c} SU_2$ geldt: d.e.w van $c(g)$ dan
 $a^{-1} = \bar{a}$ ook, dus $c = \bar{c}$. Volgens 1.2.1 volgt A^c symmetrisch.

ii) Als c reducibel (dus $G \simeq \mathbb{Z}/n$) dan $c = p + \bar{p}$

dus $\langle c \otimes p_i | p_j \rangle = \langle p + \bar{p} \otimes p_i | p_j \rangle = 0$ omdat $p \neq 1$. Dus

$$C_{ii} = z - \langle c \otimes p_i | p_i \rangle = z.$$

Als c irreducibel, dan $\{\pm 1\} \subseteq \text{Centr.}(G)$. Stel

$$p_i(-x) = (-1)^{n_i} p_i(x), \text{ dan volgt } (-1)^{n_i+1} c \otimes p_i = \sum a_{ji} (-1)^{n_j} p_j$$

(omdat $c(-x) = -c(x)$) dus volgt $a_{ii} = 0$

iii) We hebben $\langle c \otimes p_i | c \otimes p_i \rangle = \sum_j a_{ji}^2$

$$\text{Echter: } \langle c \otimes p_i | c \otimes p_i \rangle = \langle c \otimes \bar{c} | \bar{p}_i \otimes p_i \rangle =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_g |X_c|^2(g) \cdot |X_i|^2(g) \leq |X_c(1)|^2 \frac{1}{|G|} \sum |X_i|^2 \leq 4$$

Als $\sum a_{ji}^2 < 4$ dan volgt direct: $a_{ij} = 0$ of 1 .

Als $\sum a_{ji}^2 = 4$ en tevens $a_{ji} > 1$ voor zekere j dan

volgt: $c \otimes p_i = z p_j$ en dus ook $c \otimes p_j = z p_i$.

Omdat c trouw is, is Γ_c samenhangend, dus p_i en p_j zijn de enige irreducibele representaties van G . Er volgt $G = \{1\}$ of $G = \{\pm 1\}$ $\square$

(zie [16])

Gevolg: $\Gamma_c(G)$ is het affiene Dynkin diagram van een homogeen irreducibel wortelsysteem (dus van type $\tilde{A}, \tilde{D}, \tilde{E}$)

De projecties van de p_i $i \neq 1$ in $\tilde{V}$ vormen een simpel systeem van wortels voor dit wortelsysteem (Dynkin-diagram: $\Gamma'_c(G) = \Gamma_c(G) \setminus \{p_1\}$). $-\rho_1 = \sum_{i \neq 1} d_i p_i$ is de grootste wortel.

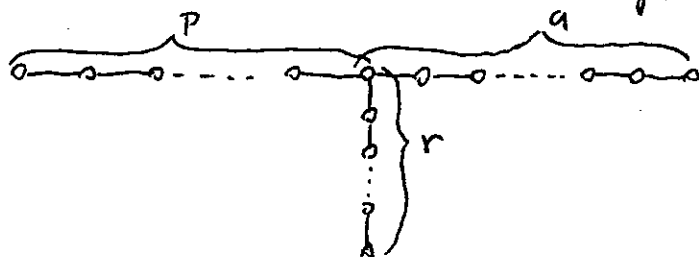
We moeten nu nog laten zien dat onder de toevolging $G \mapsto \Gamma_c(G)$ het goede diagram bij de goede groep terecht komt.

Voor een cyclische groep is dit triviaal; het diagram $\Gamma_c(G)$ is een cykel met n punten, dus $\Gamma'_c(G) \hookrightarrow A_{n-1}$.

In I § 3 hebben we gezien dat de mogelijkheden voor een niet cyclische binaire groep geparametriseerd worden door de Platonische tripels (p, q, r) met $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$, $p, q, r \geq 2$. N.l. $G = \langle p, q, r \rangle = \langle x, y, z \mid x^p = y^q = z^r = xyz \rangle$

De mogelijkheden voor de Dynkin diagrammen worden hier ook door geparametriseerd. De p, q, r beschrijven nu de lengtes van de takken in het diagram:

$T_{p,q,r} =$

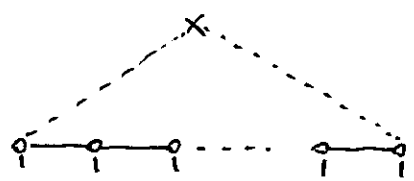
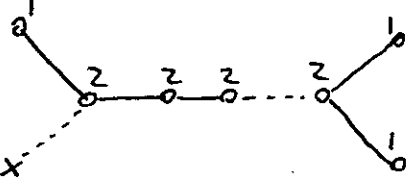
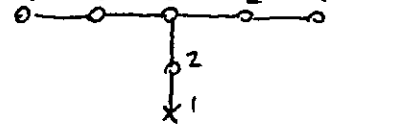
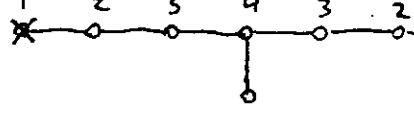
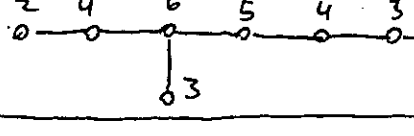


De toevoeging is dus: $G = \langle p, q, r \rangle \mapsto \Gamma'_c(G) = \Gamma_{p', q', r'}$

We laten nu zien dat $\{p, q, r\} = \{p', q', r'\}$.

1^{ste} methode (heel bot). Volgens het bovenstaande zijn de coördinaten van de grootste wortel gelijk aan de dimensies van de overeenkomstige irreducibele representaties $\neq 1$ van G . Omdat $\#G = \sum d_i^2$ en $G/[G, G] = Ab(G)$ een groep is van orde $\# \{1\text{-dim. repr. van } G\}$ kan het niet meer mislopen. ($\square$).

Hieronder geven we de diagrammen met de coördinaten van de grootste wortel, samen met de bijbehorende groepen, zodat de lezer deze bewerking kan nagaan.

G	$\#G$	$\#Ab(G)$	$\Gamma'_c(G)$
$\mathbb{Z}/n$	n	n	 $\tilde{A}_{n-1}$
$D_n = \langle n, 2, 2 \rangle$	$4n$	4	 $\tilde{D}_{n+2}$
$\Pi = \langle 3, 3, 2 \rangle$	24	3	 $\tilde{E}_6$
$\textcircled{D} = \langle 4, 3, 2 \rangle$	48	2	 $\tilde{E}_7$
$\text{II} = \langle 5, 3, 2 \rangle$	120	1	 $\tilde{E}_8$

Omdat de collectie van binaire groepen gesloten is onder commutator ondergroep nemen, is het eenvoudig om m.b.v. de diagrammen de commutator ondergroep te bepalen (zie []): Als G een binaire groep is, dan is het diagram $\Gamma'([G:G])$ gelijk aan $\Gamma(G) \setminus \{1\text{-dim rep.'s}\}$.
 Zo vinden we: $[\Pi, \Pi] = \Pi$; $[\mathbb{O}, \mathbb{O}] = \Pi$; $[\Pi, \Pi] = \mathbb{D}_2$; $[\mathbb{D}_n, \mathbb{D}_n] = \mathbb{Z}/n$

2^e methode: Deze 2^e methode, afkomstig van R. Steinberg [6] is wat ingewikkelder, maar ook veel leuker en mag daarom hier niet ontbreken.

De groep $G = \langle p, q, r \rangle$ wordt voortgebracht door 3 elementen x, y en z van orde z_p, z_q en z_r resp. De elementen $1; x^a; y^b; z^c$ ($1 \leq a < p$); ($1 \leq b < q$); ($1 \leq c < r$) vormen een systeem van representanten van de conjugatieklassen van G . De eigenwaarden v.d. matrices $\in \text{SU}_2(\mathbb{C})$ zijn dan $e^{\pm \pi i/p}$ voor x , $e^{\pm \pi i/q}$ voor y , $e^{\pm \pi i/r}$ voor z . Het karakter neemt dan de waarden $z, -z, z \cos(\pi a/p), z \cos(\pi b/q), z \cos(\pi c/r)$ op de conjugatieklassen aan. Volgens 1.2.2 zijn dit de eigenwaarden van $A^c = z \mathbb{I} - C$, met C de Cartanmatrix van $\Gamma_c(G)$.

bewering: Laat $\tilde{c}$ een (uitgebreid) Coxeter element in de Weyl groep van $\Gamma_c(G)$, en c het 'lineaire deel' van $\tilde{c}$. Dan zijn de eigenwaarden van c $1, e^{2\pi i a/p}, e^{2\pi i b/q}, e^{2\pi i c/r}$.

bewijs: Deel de simpele wortels $\beta_1, \dots, \beta_m$ op in twee club's z.d.d. de elementen in een zo'n club onderling $\perp$ staan.

De matrix $z - C$ verschijnt dan in blok vorm $\begin{bmatrix} 0 & N \\ N^t & 0 \end{bmatrix}$

Schrijf $\tilde{z} = \underbrace{s_1 \dots s_t}_{\text{uit ene club}} \cdot \underbrace{s_{t+1} \dots s_m}_{\text{andere}}$ met s_i de spiegeling

bij p_i . Er volgt $\tilde{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ N' & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & N \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ en $\tilde{z}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & N \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ N' & -1 \end{bmatrix}$

Dus $\tilde{z} + \tilde{z}^{-1} = \begin{bmatrix} N'N' - z & 0 \\ 0 & N'N - z \end{bmatrix} = (z\mathbb{1} - C)^2 - z\mathbb{1}$, waaruit het gestelde volgt. $\square$

Laat nu $\Gamma'_c(G) = T_{p',q',r'}$ en zij c_i $i=1,2,3$ het product van spiegelingen in de wortels langs de i^e tak, van het centrale punt δ in het diagram uit naar de eindpunten (de spiegeling s_δ in δ niet meegenomen).

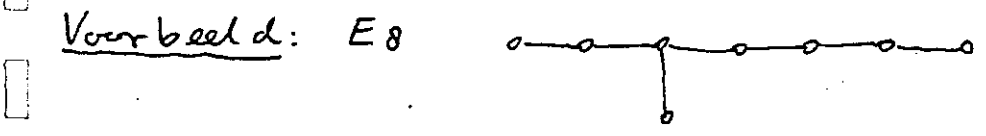
Het element $c_1 c_2 c_3$ heeft eigenwaarden $e^{2\pi i a'/p'}$, $e^{2\pi i b'/q'}$, $e^{2\pi i c'/r'}$ en 1, omdat de takken van type $A_{p'-1}$, $A_{q'-1}$ en $A_{r'-1}$ zijn, plus een eigenwaarde 1 omdat $c_1 c_2 c_3$ één spiegeling minder bevat dan de rank van $T_{p',q',r'}$ ($= p' + q' + r' - 2$).

bewering: Laat s_δ de spiegeling in de wortel δ , corresponderend met het centrale punt in $T_{p',q',r'}$. Zij p de grootste wortel en s de coëfficiënt van δ in p .

Dan geldt: $(c_1 c_2 c_3 s_\delta)^s (-\delta) = p$

bewijs: zie [], niet moeilijk.

Het is instructief om in een voorbeeld te zien hoe het coxeter element $\Omega := c_1 c_2 c_3 s_\delta$ de wortel $-\delta$ in de grootste wortel p overvoert.



We geven met onderstaande getallen de coördinaten van

de Ω getransformeerden van $-\delta$ t.o.v. de simpele wortels.

$$-\delta = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & & & & \end{smallmatrix} \xrightarrow{\Omega} \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & & & & \end{smallmatrix} \xrightarrow{\Omega} \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ & & 1 & & & & \end{smallmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\Omega} \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ & & 2 & & & & \end{smallmatrix} \xrightarrow{\Omega} \begin{smallmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ & & 2 & & & & \end{smallmatrix} \xrightarrow{\Omega} \begin{smallmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ & & 3 & & & & \end{smallmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\Omega} \begin{smallmatrix} 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ & & 3 & & & & \end{smallmatrix} = \rho = \Omega^6(-\delta)$$

We kunnen nu bewijzen $\{p, q, r\} = \{p', q', r'\}$

Laat n.l. $c = s_{-\rho} c_1 c_2 c_3 s_{\delta}$

Omdat $-\rho = \Omega^5(\delta)$ geldt $s_{-\rho} = s_{\Omega^5(\delta)} = \Omega^5 s_{\delta} \Omega^{-5}$

Dus: $c = \Omega^5 s_{\delta} \Omega^{-5} \cdot \Omega = \Omega^{5-1} c_1 c_2 c_3 \Omega^{1-5}$

M.a.w: c is geconjugeerd met $c_1 c_2 c_3$

Volgens bewering 1 heeft c e.w's $1, e^{2\pi i a/p}, e^{2\pi i b/q}, e^{2\pi i c/n}$

terwijl $c_1 c_2 c_3$ e.w's $1, e^{2\pi i a'/p'}, e^{2\pi i b'/q'}, e^{2\pi i c'/r'}$ had.

Hieruit volgt: $\{p, q, r\} = \{p', q', r'\}$ $\square$

§1.6 Slotopmerkingen.

1.6.1 Men kan zich afvragen of de inhomogene

Dynkin diagrammen ook m.b.v. representaties

verkregen kunnen worden. Dat kan weer wanneer we twee

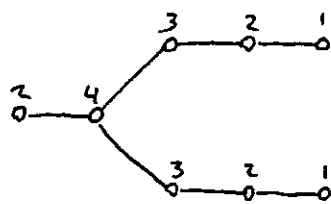
in een geschakelde binaire groepen bekijken. Slodowy [17]

definiert op iets andere wijze dan in §1.4 m.b.v. Res

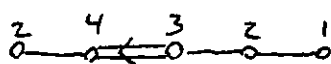
en Ind twee tussen liggende diagrammen, die nu echter

duaal blijken te worden.

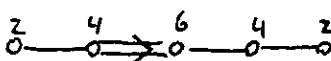
Voorbeeld: $1 \rightarrow \Pi \rightarrow \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1$.



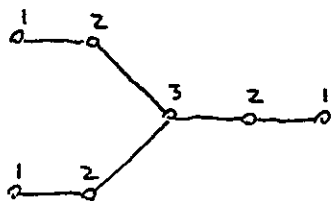
$$\tilde{E}_7 = \Gamma(\mathbb{O})$$



$$\tilde{F}_4$$



$$\tilde{F}_4^*$$



$$\tilde{E}_6 = \Gamma(\Pi)$$

Op deze wijze verkrijgt men alle Euclidische gegeneraliseerde Cartan-diagrammen.

1.6.2 In I § zagen we hoe een resolutiegraaf via Mumford's presentatie van de fundamenteelgroep van de link aan elk Dynkindiagram van type A, D of E een binaire groep toevoegt. In beschouwingswijze correspondeert met elk punt in het diagram een element v.d. groep of beter, een conjugatieklasse $\neq \{1\}$.

In dit hoofdstuk zagen we hoe via McKay's correspondentie het diagram van G m.b.v. representaties teruggevonden kan worden. Met elk punt in het diagram correspondeert nu een irreducibele representatie $\neq 1$.

Nu zijn conjugatieklassen en representaties dual (men kan karakters op klassen evalueren,) maar niet

canoniek isomorf. Voor een binaire groep krijgen we via de diagrammen echter wel een min of meer natuurlijke bijjectie. De vraag is nu: hoe kan men bij een conjugatie klasse direct de bijbehorende representatie vinden?

Voor zover ik kan zien is er geen verband tussen de representaties en de waarden van de karakters op de overeenkomstige conjugatie klassen.

1.6.3. Men zou ook kunnen proberen direct uit de structuur van de conjugatie klassen van een binaire groep diagrammen te construeren.

In eerste instantie lijkt het volgende veelbelovend:

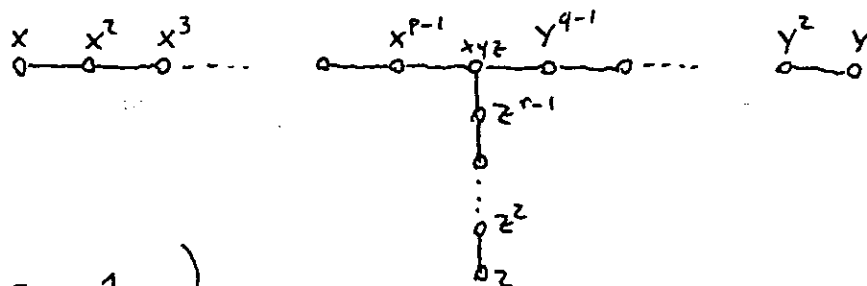
Laat C_1 en C_2 conjugatie klassen. De producten x_1, x_2 $x_i \in C_i$ vormen een vereniging van conjugatie klassen. In de 'klassen ring' $K(G)$ schrijven we $C \cdot C_i = \sum d_{ji} C_j$ en we kunnen hopen dat voor geschikte keuze van C de matrix d_{ji} weer een Cartan matrix oplevert.

Wat echter lijkt te ontbreken is een canonieke klasse. Een verder probleem is dat langs de takken van het diagram het aantal elementen per conjugatie klasse constant is.

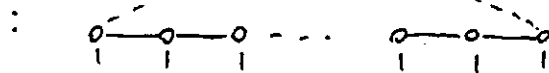
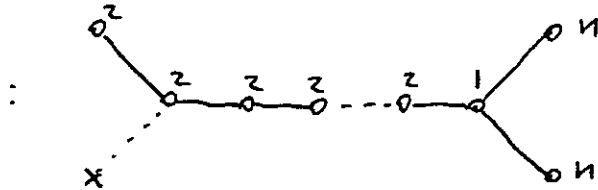
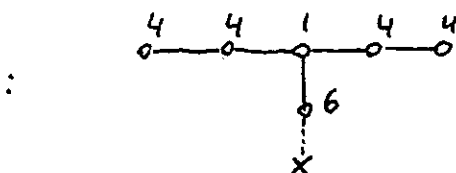
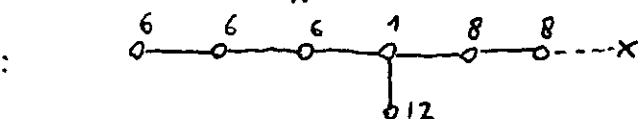
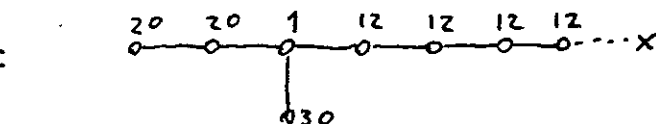
Hieronder geven we deze aantallen.

(Punten in diagram zijn nu de volgende conjugatie klassen:

$$G = \langle p, q, r \rangle$$



en x de klasse van 1.)

$\mathbb{Z}/n$  D_n  E_6  F_4  G_2 

Mark op: deze getallen zijn gelijk aan het aantal hoekpunten, ribben en vlakken van het overeenkomstige regelmatige veelvlak.

Tevens zijn dit de graden van de fundamentele invarianten van de commutator ondergroep.

De klassenring structuur van D_n is eenvoudig:

Laat $C_a = \{x^a, x^{2n-a}\}$ ($C_0 = \mathbb{Z}\{1\}$; $C_n = \mathbb{Z}\{-1\}$) en

$C_y = \bigcup_k \{x^{2k}y\}$; $C_z = \bigcup_k \{x^{2k}\}$

Dan: $C_a \cdot C_b = C_{a+b} + C_{a-b}$

$$C_a \cdot C_y = 2 \delta(a|E) C_y + 2 \delta(a|O) C_z \quad (\delta(a|O) = \begin{cases} 0 & a \text{ even} \\ 1 & a \text{ oneven} \end{cases})$$

$$C_a \cdot C_z = 2 \delta(a|O) C_y + 2 \delta(a|E) C_z$$

$$C_y \cdot C_y = C_z \cdot C_z = n \cdot \begin{cases} \{1\} + C_2 + C_4 + \dots + C_{n-2} + \{-1\} & n \text{ even} \\ C_1 + C_3 + \dots + \{-1\} & n \text{ oneven} \end{cases}$$

$$C_y \cdot C_z = n \cdot \begin{cases} C_1 + C_3 + \dots + C_{n-1} & n \text{ even} \\ \{1\} + C_2 + C_4 + \dots + C_{n-1} & n \text{ oneven} \end{cases}$$

Het is mij niet gelukt hier uit iets Dynkin diagram-achtigs uit te halen.

§2. De stelling van Gonzalez-Springberg & Verdier.

De minimale (= goede) resolutie van de simpele singulariteit $\mathbb{C}^2/G$, met G een binaire groep, heeft een resolutie graaf in de vorm van een Dynkin diagram van type A, D of E . (zie I §4.).

In de vorige § is uiteengezet hoe men m.b.v. de irreducibele representaties $\neq 1$ een diagram $\Gamma'_c(G)$ verkrijgt dat isomorf is met deze resolutie graaf. Men kan zich afvragen of deze correspondentie 'toevallig' is, of dat men dit isomorfisme op een natuurlijke wijze kan realiseren.

Onafhankelijk van elkaar hebben Gonzalez-Springberg & Verdier [12] en H. Knörrer een meetkundige constructie gegeven die aan elke irreducibele representatie $\neq 1$ van G een divisor op de resolutie $\tilde{X}$ van $X = \mathbb{C}^2/G$ toevoegt, die de exceptionele divisor precies in één component snijdt, en die zo het isomorfisme van diagrammen realiseert.

§2.1 Notatie en definities.

Laat $G \hookrightarrow \text{SU}_2(\mathbb{C})$ een binaire groep, werkend op $V := \mathbb{C}^2$ via z'n natuurlijke representatie ρ .

We noteren $(X, 0)$ voor V/G de corresponderende simpele singulariteit. (Waar nodig verstaan we kernen van singulariteiten of resoluties. We maken geen

onderschuid in notatie.)

propositie: Laat $K^G(V)$ de Grothendieck ring van coherente $\mathcal{O}_V$ -modulen met G -actie en $R(G)$ de representatie ring van G . Dan is de afbeelding

$$\lambda: R(G) \longrightarrow K^G(V); p \longmapsto \mathcal{O}_V \otimes_{\mathbb{C}} E_p$$

, met E_p de representatie ruimte van p , een isomorfisme van ringen.

bewijs: zie []. De onderliggende vectorbundel van $\mathcal{O}_V \otimes_{\mathbb{C}} E_p$ is natuurlijk $V \times E_p$, met G actie $g(v, e) = (c(g).v, p(g)e)$

Laat $(\tilde{X}, E) \xrightarrow{q} (X, o)$ de minimale resolutie van X, o , E de exceptionele divisor; $E = \bigcup E_i$; $\text{Irr}(E) = \{E_i\}$ de verzameling irreducibele componenten.

Laat $\text{Pic}(\tilde{X}) = \text{Pic}(E)$ de locale Picard variëteit van E (d.i.: groep van locale divisoren mod equivalentie, of de groep van inverteerbare $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -modulen) en $\text{Pic}_E(\tilde{X})$ idem met support in E . De E_i vormen een basis voor $\text{Pic}_E(\tilde{X})$ en zij $F_i \in \text{Pic}(\tilde{X})$ een duale basis (n.b. X, o is rationaal).

De F_i zijn dus divisoren die E_i transversaal snijden, en verder niet. Zij tenslotte $K(\tilde{X})$ de Grothendieck groep van coherente $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -modulen.

propositie: De afbeelding $\varphi: K(\tilde{X}) \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \text{Pic}(\tilde{X})$

$x \longmapsto (\text{rank } x, c_1(x))$ is een isomorfisme van groepen.

Hierin is $\text{rank } x$ de rank van het modul x en c_1 zijn 1^e chern klasse.

bewijs: zie [12].

Beschouw het diagram:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} & \longrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow q \\ V & \longrightarrow & X \end{array}$$

met $\tilde{V} = (V \times_X \tilde{X})_{\text{red}}$

en de afbeelding $\pi: R(G) \longrightarrow k(\tilde{X})$ gedefinieerd door $p \longmapsto (\mathcal{O}_{\tilde{V}} \otimes_{\mathcal{O}_V} (\mathcal{O}_V \otimes_{\mathbb{C}} E_p))^G =: F_p = \pi(p)$.

Stelling: (Gonzalez-Springberg & Verdier)

- i) π is een isomorfisme van groepen.
- ii) F_p is lokaal vrij van rang $\deg(p)$.
- iii) Voor $p \in \text{Irr}(G)$; $p \neq 1$ is er precies een $E(p) \in \text{Irr}(E)$ met $\pi(p) = (\deg p, F(p))$ en verder:

$$E(p_i) \cdot E(p_j) = \langle \mathbb{C} \otimes p_i | p_j \rangle \quad ; \quad p_i \neq p_j.$$

bewijs: Dit is de inhoud van [12].

iii) zegt dus dat de afbeelding π het isomorfisme van grafen realiseert.

ii) het lokaal vrij zijn van F_p betekent dat we een vectorbundel op $\tilde{X}$ krijgen. Het bewijs hier van maakt essentieel gebruik van de rationaliteit van $X, 0$.

De schoof $\pi(p)$ verkrijgt men ook als volgt:

een invariante sectie $s \in H^0(V, E)^G$ met $E = \mathcal{O}_V \otimes E_p$ levert een sectie $s' \in H^0(X-0, E')$ met E' de schoof van de vectorbundel $V \times E_p / G$ op $X-0$. Dit levert weer een sectie $s'' \in H^0(\tilde{X}-E, E'')$ onder het isomorfisme $\tilde{X}-E \xrightarrow{q} X-0$.

en dit geeft tenslotte een sectie $\pi(s) = i^* s'' \in i^* \mathcal{E}''$

met $i : \tilde{X} - E \hookrightarrow \tilde{X}$ de inclusie. Laat nu $\pi(p)$ de schoof voortgebracht door $\pi(s)$; $s \in H^0(V, \mathcal{E})^G$.

(zie [13].)

Het bewijs van bovenstaande stelling in [12] is niet zo erg begrijpelijk. In de volgende § geven we een behandeling gebaseerd op het werk van H. Knörrer, dat meetkundiger van aard is.

§ 3. De constructie van H. Knörrer.

We zullen trachten de behandeling zo eenduidig en expliciet mogelijk te houden.

Het idee van de constructie is eenvoudig: de schoof $\pi(p)$ wordt voortgebracht door globale secties

$$s_i \quad i=1, \dots, 2d \quad d = \deg(p). \in (R \otimes E_p)^G \quad R = \mathbb{C}[x, y]$$

Door geschikte determinanten te vormen verkrijgen we reële semiinvarianten j_p en j'_p die een divisor op $X = V/G$ voorstellen. Het zal blijken dat de strikt getransformeerde van $\lambda j_p + \mu j'_p = 0$, λ, μ generiek, de exceptieele divisor $E \subset \tilde{X}$ op de goede manier snijdt en de 1^e chern klasse van de lokaal vrije schoof $\pi(p)$ voorstelt.

§3.1 J-polynomen.

We beginnen met het algemene begrip J-polynoom.

Laat G een eindige groep, werkend op een vectorruimte V over $\mathbb{C}$ en zij $R = \text{Sym}(V)$ de symmetrische algebra van V (dus $\text{Sym}(V) \cong \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ $n = \dim V$).

We kiezen nu een vast H.S.O.P (homogeen systeem van parameters) $\theta_1, \dots, \theta_n$ voor de ring van invarianten R^G (dus $\theta_i \in R^G$ alg. onafh. en $R^G \leftarrow S := \mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n]$ geheel).

Laat $M = (\theta_1, \dots, \theta_n)$. Het is bekend (en een vondst in te zien, zie [18]) dat de yegradeerde vectorruimte

R/M als G -moduul isomorf is met $t \cdot \text{Reg}$, met Reg de reguliere representatie en het getal $t = \prod \deg \theta_i / |G|$.

Voor elke irreducibele representatie ρ kunnen we dus $t \cdot \deg \rho$ copieën van E_ρ in R/M vinden. Door terug te liften naar R kunnen we schrijven:

$$R = \mathcal{H} \otimes S \quad \text{met} \quad \mathcal{H} \cong_G \left(\bigoplus_{\rho} \bigoplus_{i=1}^{t \cdot \deg \rho} E_{\rho,i} \right) \subset R$$

Zij nu $N: \text{Irr}(G) \rightarrow \mathbb{Z}^N$; $\rho \mapsto N_\rho \in \mathbb{N}$

z.d.d i) $\# N_\rho \equiv \deg \rho$ ii) $k \in N_\rho \Rightarrow k \leq t \deg \rho$

een functie die voor elke representatie $\deg(\rho)$ indices uitkiest. We vormen $\mathcal{R} = \mathcal{R}_N = \bigoplus_{\rho} \bigoplus_{j \in N_\rho} E_{\rho,j} \subset \mathcal{H}$.

dus $\mathcal{R} \cong \text{Reg}$ als G -moduul.

Verder $\dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{R} \otimes E_\rho)^G = \deg \rho$

$$(\dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{H} \otimes E_\rho)^G = t \cdot \deg \rho).$$

Kies nu een basis $s_1, \dots, s_d$ $d = \deg(p)$ voor

$(R \otimes E_p)^G$ en schrijf $s_i = \sum s_{ij} \otimes e_j$; $s_{ij} \in R$, $e_j \in E_p$

We definiëren:

$$j_{R,p} = \det(s_{ij})$$

of, meer invariant, : $j_{R,p} = s_1 \wedge s_2 \wedge \dots \wedge s_d \in (R \otimes \wedge^d E_p)^G$

De volgende eigenschappen zijn evident:

i) $j_{R,p}$ hangt tot op een scalar $\neq 0$ niet van de basis keuze $\{s_i\}$ af.

ii) $j_{R,p}$ is een $\det(\bar{p})$ -semiinvariant.

Voor een willekeurig representatie ψ definiëren we

$j_{R,\psi}$ door te eisen $j_{R,\psi+x} = j_{R,\psi} \cdot j_{R,x}$.

Zij tenslotte $J_R = j_{R, \text{reg}}$ (de 'hoofd j ').

Het zou zeer wenselijk zijn om precieze condities te vinden waaronder $j_{R,p} \neq 0$. Dit blijkt i.h.a. zeer moeilijk te zijn.

Het is duidelijk dat $J_R(x) \neq 0 \Leftrightarrow j_{R,p}(x) \neq 0 \quad \forall p \in \text{Irr}(G)$.

Wel hebben we het volgende lemma:

lemma: Laat $R_G = \langle x \in R \rangle_G$ en zij $x \in V$.

Dan geldt: $J_R(x) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\pi_x: R_G \longrightarrow F_{G,x}$ is een isomorfisme.

waarbij π_x de afbeelding is die een functie uit R_G beperkt tot een functie op de baan van x , $\in F_{G,x}$.

bewijs: zie [19].

Voor een reflectie groep (dan $t=1$; $R = H$) volgt direct $J_R \neq 0$.

§3.2. Voor $V = \mathbb{C}^2$ en G een binaire groep zullen we in wat nu volgt polynomen j van bovenstaand type bepalen.

Door G met index 2 in een reflectiegroep G' in te bedden (dus $1 \rightarrow G \rightarrow G' \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1$) krijgen we een natuurlijk parametersysteem van de invarianten van G'

Zij $R^{G'} = \mathbb{C}[\Phi, H]$. We hebben $t=2$.

en we schrijven $R^G = (1 \oplus J) \otimes R^{G'}$ met J een invariant van G van graad m (die een semi-invariant van G' is)

De graden m , $\deg \Phi = n_1$ en $\deg H = n_2$ noemen we de graden van G .

Dere zijn:

	n_1	n_2	m
$\mathbb{Z}/n$	2	n	n
D_n	4	$2n$	$2n+2$
Π	6	8	12
$\textcircled{0}$	8	12	18
II	12	20	30

het geen men snel in ziet (zie [5])

Aan given $\dim_{\mathbb{C}} (H \otimes E_p)^G = 2d$ $d = \deg p$ kunnen we secties $s_1, s_2, \dots, s_{2d}$ kiezen die $(H \otimes E_p)^G$ (als S -modul) voortbrengen. laat $\deg s_i \leq \deg s_{i+1}$.

We zullen zien dat in feite $\deg s_i < \deg s_{i+1}$, behalve wanneer p de z.g. centrale representatie 3 is, en $i=d$.

(3 is voor niet cyclische G het centrum van $\Gamma_c'(G)$; voor

$G = \mathbb{Z}/2n$ is 3 representatie 'diametraal t.o.v 1' in $\Gamma_c'(G)$)

We vormen daarom $j_p = s_1, 1, \dots, 1, s_d$ en

$j_p = s_1, 1, \dots, s_{d-1}, 1, s_{d+1}$ en zetten:

$W(p) = \langle j_p, j'_p \rangle_{\mathbb{C}}$. Merk op: de ruimte opgespannen door j_p en j'_p hangt nu, zelfs in het geval $\deg s_d = \deg s_{d+1}$ niet van de keuze van de secties af.

Wat we niet zullen bewijzen is het lastige:

Propositie: $\dim_{\mathbb{C}} W(p) = 2$.

Dit betekent i.h.b. $j_p \neq 0, j'_p \neq 0$.

Voor een bewijs zie [13] en [14].

We zullen een schets geven van:

Stelling: Laat $f \in W(p)$ generiek en zij C_f de strikt getransformeerde van de divisor $f=0$ in X .

Dan:

i) C_f snijdt de exceptionele divisor in precies één punt, in één component $e_p \in \text{Irr}(E)$.

ii) De toevoeging $f \mapsto e_p$ realiseert het isomorfisme van diagrammen.

(iii) $C_f \cap C_{f'} = \emptyset$ als $f \neq f'$.

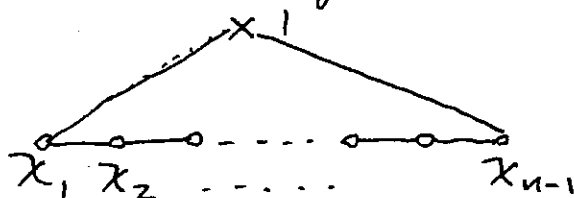
Met iets meer moeite kan men bewijzen dat de schroot $\pi(p)$ inderdaad lokaal vrij is, op $\tilde{X} - C_f$ voortgebracht door $s_1, \dots, s_d$ en dat de divisor C_f de 1^e chern klasse van $\pi(p)$ representeert.

Voor dit soort zaken en vele andere details zie vooral [3].

§3.3. Het cyclische geval.

Het cyclische geval is eenvoudig expliciet door te rekenen. Omdat dit geval iets afwijkt van de andere gevallen ($\mathbb{Z}/n$ is niet van driehoeks type, zie I §4.) en het algemene geval hier in feite op terug gevoerd kan worden behandelen we dit eerst.

De representatie graaf $\Gamma_c(\mathbb{Z}/n)$ heeft de vorm:



$$c = x_1 + x_{n-1}$$

met $X_k \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3^{-1} \end{pmatrix} = 3^k$.

De fundamentele invarianten $X = xy$, $Y = x^n$, $Z = y^n$ bedden $X = V/G$ in $\mathbb{C}^3$ in als $X^n - YZ = 0$.

Zowel x^k als y^{n-k} transformeren volgens X_k . Dus:

$$W(X_{n-k}) = \langle x^k, y^{n-k} \rangle_{\mathbb{C}} \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Een element $f \in W(X_{n-k})$ is te schrijven als:

$$\lambda_1 x^k - \lambda_2 y^{n-k} = f$$

Mit een lemma in Appendix I, waar de resolutie van cyclische quotiënten expliciet wordt uitgevoerd, volgt nu:

De divisor C_f snijdt de k -de divisor transversaal in één punt, en geen anderen. (n.b. de kromme $f=0$ is i.h.a. reducibel). De stelling is in dit geval dus vrij triviaal. Merk op dat x^k de lineaire vorm is die met multipliciteit k op de speciale baan $(0:1) \in \mathbb{P}(V)$ verdwijnt, terwijl y^{n-k} in het antipodale punt wel is.

§3.4 Speciale banen en resolutie graaf.

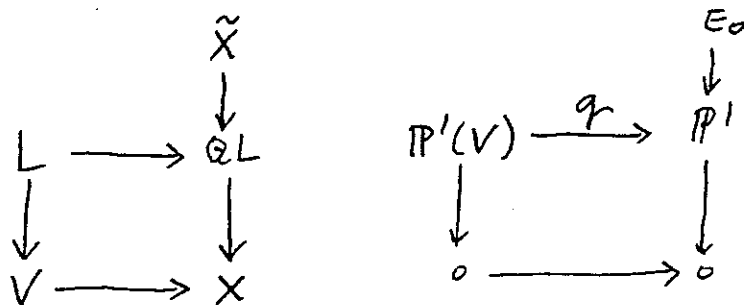
Het idee uit §3.3 is te generaliseren naar het geval G niet cyclisch.

Stel nu G niet cyclisch.

Zoals we in I § zagen heeft de actie van G op $\mathbb{P}(V)$ 3 speciale banen. De stabilisator G_z van een punt z van zo'n speciale baan is cyclisch van orde z_p , z_q of z_r .

(n.b. -1 werkt triviaal op $\mathbb{P}(V)$)

We herhalen het diagram: (vgl. I § 5.)



L is de 'blow up' van V in 0 , ofwel $\text{Tot}(\mathcal{O}(-1))$. QL heeft 3 singuliere punten, cyclische quotiënten van type $(p, p-1)$, $(q, q-1)$, $(r, r-1)$. De afbeelding $\mathbb{P}'(V) \rightarrow \mathbb{P}^1$ vertaakt in de punten

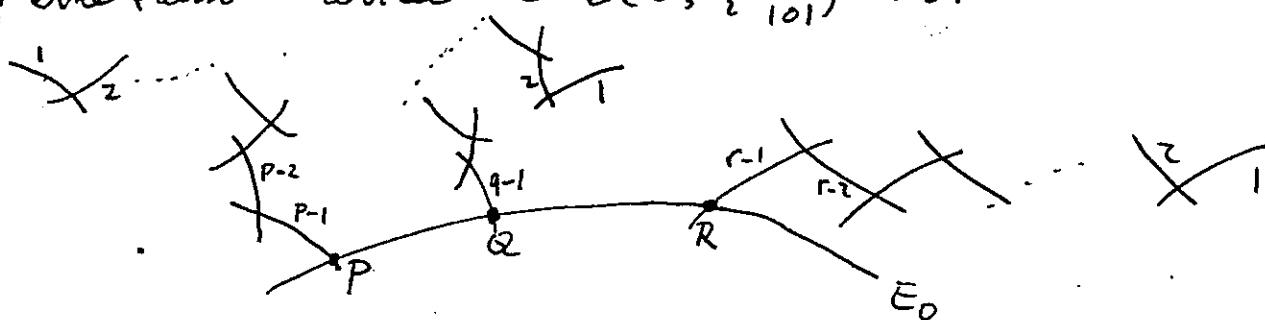
v.d. speciale banen, boven 3 punten $P, Q, R \in \mathbb{P}^1$. Een

exceptionele divisor is óf E_0 , de centrale kromme, óf een component van de resolutie v.d. cyclische quotiënten. Een

E wordt dus gegeven door een paar (σ, k) met σ een

speciale baan en $1 \leq k \leq \frac{1}{2} \frac{|G|}{|G|} - 1$ dus: $E := e(\sigma, k)$

Voor elke baan σ zetten we $e(\sigma, \frac{1}{2} \frac{|G|}{|G|}) = E_0$.



Zij nu $z \in \sigma$, σ een speciale baan; $|G_z| = 2S$

Laat l de lineaire vorm zijn die in z verdwijnt, $A(l)$ de vorm die verdwijnt in het antipodale punt (als $l = \alpha x + \beta y$, dan $A(l) = -\bar{\beta}x + \bar{\alpha}y$). Zij $\mathcal{C}(z, k)$ de schaar van krommen:

$$\lambda_1 l^k - \lambda_2 A(l)^{2S-k} = 0 \quad (\lambda_1: \lambda_2) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

met $1 \leq k \leq S$.

propositie: Voor generieke $C \in \mathcal{C}(z, k)$ snijdt $\pi(C)$ (de strict getransformeerde in $\tilde{X}$ van C' , het beeld van C in X) de exceptionele divisor transversaal in één punt, slechts liggend op $e(\sigma, k)$. Verder $\pi(C) \cap \pi(C'') = \emptyset$ $C \neq C''$.

bewijs: Het is duidelijk dat $\pi(C)$ ook gelijk is aan de getransformeerde van het beeld onder q van de getransformeerde van C in L . Als $z' \in \mathbb{P}(V)$ en $z' \notin \sigma$ dan $z' \notin C^\delta$ voor alle $\gamma \in G$ en bijna alle $C \in \mathcal{C}(z, k)$, dus $\pi(C)$ snijdt de exceptionele divisor hoogstens buiten $q(z) \in \mathbb{P}^1$.

Op de blow-up L heeft $C \in \mathcal{C}(z, k)$ in lokale coördinaten u, v ($u, v \rightarrow u \cdot v = x, v = y$) de vorm

$$\lambda_1 u^k - \lambda_2 v^{2(S-k)} = 0 \quad \text{en de actie van } G_z \text{ is}$$

$$\gamma_0 \cdot (u, v) = (\zeta^2 u, \zeta v) \quad (\gamma_0 = \begin{pmatrix} \zeta^2 & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}, \text{ voortbrenger van } G_z)$$

Duidelijk is dat γ_0^S als spiegeling werkt en op

$$L' = L / \gamma_0^S = \text{Tot}(\mathcal{O}(-2)) \text{ hebben we in lokale coördinaten}$$

$$\lambda_1 u^k - \lambda_2 w^{S-k} = 0 \quad (w = v^2) \text{ en } G_z \text{ werkt}$$

nu als $(u, w) \mapsto (\zeta^2 u, \zeta^{-2} w)$. Het gestelde volgt

nu uit het cyclische geval, met de opmerking dat de centrale kromme gegeven wordt door $w = 0$

(zie voor iets meer detail [13])

□

§3.5. Bepaling van j_p en j'_p .

Laat R_i het i -de graads deel van $R = \mathbb{C}[x, y]$ en H_i etc. analoog.

We definiëren de Poincaré reeksen

$$P_p(T) = \sum_i \dim_{\mathbb{C}} (R_i \otimes E_p)^G \cdot T^i$$

en het polynoom

$$F_p(T) = \sum_i \dim_{\mathbb{C}} (H_i \otimes E_p)^G T^i$$

Het polynoom $F_p(T)$ vertelt ons in welke graden de representatie p voorkomt (eigenlijk $\bar{p}$, maar $F_p = F_{\bar{p}}$ zie [3])

We hebben: $P_p(T) = F_p(T) \cdot P(T)$, met $P(T)$ de Poincaré reeks van R^G (omdat $R = H \otimes R^G$); $P(T) = \frac{1}{(1-T^{n_1})(1-T^{n_2})}$

Omdat $\dim (H \otimes E_p)^G = 2d$, $d = \deg(p)$ hebben we:

$$F_p(T) = 2d.$$

We zetten $F_p(T) = \sum_{i=1}^{2d} T^{q_i(p)}$ $q_i(p) \leq q_{i+1}(p)$.

De $q_i(p)$ heten de ' p -exponenten'.

Duidelijk zal zijn: $F_p(T) = 1 + T^m$ ($m = \deg f$); $F_c(T) = T + \dots$?

Het blijkt mogelijk de F_p zonder veel rekenwerk in handen te krijgen.

Lemma: (T. Springer) Zij $p_0 \in \text{Irr}(G)$; $p_0 \neq 1$

en zij $C \otimes p_0 = p_1 + \dots + p_\ell$

Dan: $(\frac{1}{T} + T) F_p(T) = F_{p_1}(T) + F_{p_2}(T) + \dots + F_{p_\ell}(T)$

bewijs: $\sum (R \otimes E_{p_i})^G = (R \otimes \sum E_{p_i})^G = (R \otimes R_1 \otimes E_0)^G$

Met de Clebsch-Gordan formule (zie [5]) $R_i \otimes R_1 = R_{i+1} \oplus R_{i-1}$

voor $i \neq 0$ volgt nu: $(\frac{1}{T} + T) P_{p_0}(T) = \sum P_{p_i}(T)$ en delen door

$P(T)$ levert het gestelde. $\square$

De Clebsch-Gordan formule toepassen op

$(R \otimes R_1)^G$ vinden we voor $P_C(T)$:

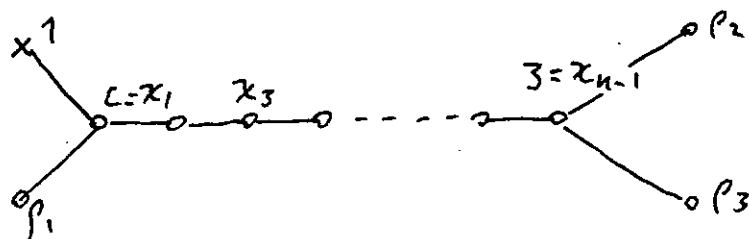
$$P_C(T) = \left(T + \frac{1}{T}\right) P_1(T) - \frac{1}{T}$$

en zo: $F_C(T) = T + T^{n_1-1} + T^{n_2-1} + T^{n-1}$

Omdat we weten hoe $C \otimes \rho$ uit een valt (dat wordt juist door $\Gamma_C(G)$ bepaald) kunnen we door langs het diagram te lopen de $F_\rho(T)$ inductief bepalen.

We volstaan met het vermelden van het resultaat:

D_n :



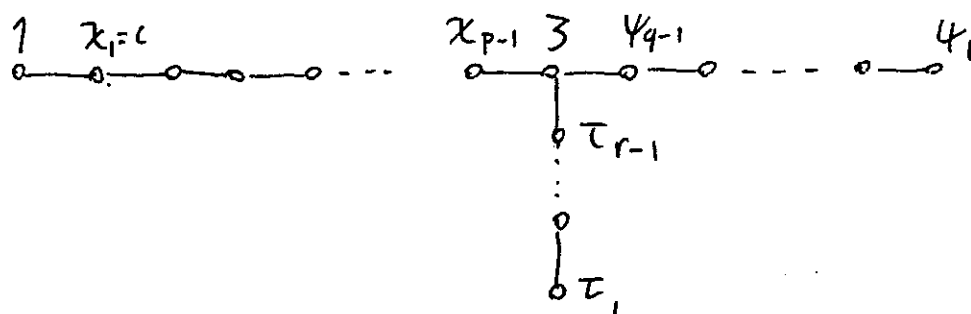
bijvoorbeeld: $C \otimes \rho_1 = C$, dus $\left(T + \frac{1}{T}\right) F_{\rho_1}(T) = T + T^3 + T^{2n-1} + T^{2n+1}$

$$\Rightarrow F_{\rho_1}(T) = T^2 + T^{2n}$$

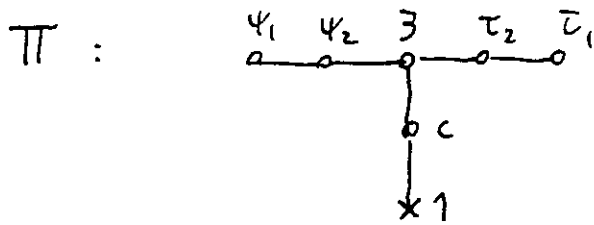
En: $F_{x_i}(T) = T^i + T^{i+2} + T^{2n-i} + T^{2n+2-i}$

$$F_{\rho_2}(T) = F_{\rho_3}(T) = T^n + T^{n+2}$$

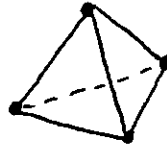
In de gevallen Π , $\textcircled{D}$ en $\textcircled{II}$ heeft $\Gamma_C(G)$ de vorm:



We vermelden voor elk van de gevallen de p -exponenten (met enig gepruts kan men formules voor F_{x_i} , F_{4_i} en F_{τ_i} vinden; die zeggen echter weinig).



; invarianten: 6, 8 ; 12



exponenten: ψ_1 : 4 , 8

q : 4

q' : 8

ψ_2 : 3, 5, 7, 9

8

10

3 : 2, 4, 6, 6, 8, 10

12

12

τ_2 : 3, 5, 7, 9

8

10

τ_1 : 4 , 8

4

8

c : 1 5 7 11

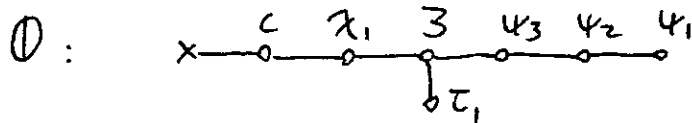
6

8

1 : 0 12

0

12



invarianten: 8, 12 ; 18

exponenten: 1 : 0 , 18

q : 0

q' : 18

c : 1, 7, 11, 17

8

12

χ_2 : 2, 6, 8, 10, 12, 16

16

18

3 : 3, 5, 7, 9, 9, 11, 13, 15

24

24

ψ_3 : 4, 6, 8, 10, 12, 14

18

20

ψ_2 : 5, 7, 11, 13

12

16

ψ_1 : 6 , 12

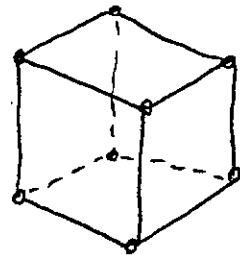
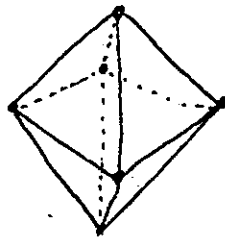
6

12

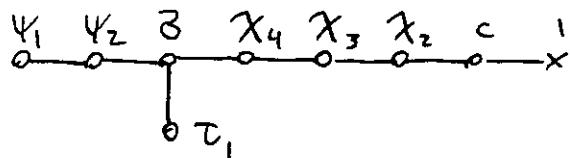
τ_1 : 4, 8, 10, 14

12

14



II



graden: 12, 20; 30

exponenten	1	:	0			30		q: 0	q': 30	
c	:	1		11		19		29	12	20
χ_2	:	2		10		12		18	20	28
χ_3	:	3		9		11		13	17	19
χ_4	:	4		8		10		12	14	16
3	:	5, 7, 9, 11, 13, 15, 15, 17, 19, 21, 23, 25						60	60	
ψ_2	:	6, 8, 12, 14, 16, 18, 22, 24						40	42	
ψ_1	:	7		13		17		23	20	24
τ_1	:	6		10		14		16	20	24

De oplettende lezer zal o.m. opgemerkt hebben dat:

i) De polynomen $F_p(T)$ wederkerend zijn:

$$F_p(T) = T^m F_p\left(\frac{1}{T}\right)$$

ii) De exponenten $q_i(p)$ voldoen aan:

$$q_i(p) \leq q_{i+1}(p) - 2, \text{ behalve als } p=3 \text{ en } i = \frac{1}{2}d = d$$

$$\text{Dan n.l.: } q_{\frac{1}{2}d}(3) = q_{\frac{1}{2}d+1}(3) \quad d = \deg g$$

Eigenschap i) is heel algemeen waar: Laat G een eindige groep, werkend op V ; $\dim V = n$. Uit

Molien's formule (zie [5]):

$$P_p(T) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{\chi_p(g)}{\det(1 - gT)} \quad \text{waaruit volgt:}$$

$$P_p\left(\frac{1}{T}\right) = (-1)^n P_{\bar{p}, \sigma}(T) \quad \text{met } \sigma_g = \det(g)^{-1}$$

Wanneer $\theta_1, \dots, \theta_n$ een H.S.O.P. voor R^G is en

$$F_p(T) := P_p(T) \cdot \prod (1 - T^{n_i}) \quad n_i = \deg(\theta_i)$$

en $F_1(T) = \sum_{i=1}^t T^{d_i}$, dan volgt:

$$F_p(T) = T^{dt} \cdot F_{\bar{p}, \sigma}(\frac{1}{T}).$$

Als $G \subset SL(V)$ en bijvoorbeeld $p = \bar{p}$ dan staat er:

$$F_p(T) = T^{dt} \cdot F_p(\frac{1}{T}).$$

De graden van j_p en j'_p volgen nu door het optellen van de exponenten:

$$q(p) := \deg(j_p) = \sum_{i=1}^d q_i(p)$$

$$q'(p) := \deg(j'_p) = \deg(j_p) + q_{\deg(p)+1}(p) - q_{\deg(p)}(p).$$

Deze getallen zijn vermeld in de rechter kolom op de laatste 2 pagina's.

Het is niet moeilijk om te bewijzen dat:

lemma: Laat $p \in \text{Irr}(G)$ op een tak ter lengte a

in $\Gamma_c(G)$ liggen, en zij $\delta(p)$ de afstand tot het centrale punt z . Dan: i) $q(p) = \frac{a - \delta(p)}{2a} \cdot |G|$; ii) $q'(p) = q(p) + 2\delta(p)$

bewijs: zie [13].

Laat nu $\mathcal{O}$ een speciale baan op $\mathbb{P}(V)$ en $1 \leq k \leq \frac{1}{2} \frac{|G|}{|O|}$ en zij f_1 de binaire vorm die met orde k op $\mathcal{O}$ verdwijnt (dus $\deg f_1 = k \cdot |O|$). Laat $z \in \mathcal{O}$ en l de lineaire vorm die in z verdwijnt, $A(l)$ de vorm die in het antipodale punt nul is. Zij nu $s = |G_z|$, de orde van de stabilisator G_z van z .

en laat $f_2 := f_1 \cdot \sum_{\gamma \in G} \left[\frac{A(e)^{S-k}}{e^k} \right] \gamma$ (op juiste manier te verstaan).

$$W(\sigma, k) = \langle f_1, f_2 \rangle_{\mathbb{C}}$$

f_1 en f_2 zijn twee semiinvarianten, transformeren d
volgens het zelfde karakter, net als j_p en j'_p .

We hebben dan ook:

propositie: Voor $p \in \text{Irr}(G)$ $p \neq 1$ is de ruimte

$$W(p) = \langle j_p, j'_p \rangle_{\mathbb{C}} \text{ gelijk aan } W(\sigma, k) \text{ voor zekere } \sigma \text{ en } k.$$

De afbeelding $p \mapsto W(p) \xrightarrow{\cong} W(\sigma, k) \mapsto e(\sigma, k)$

realiseert het isomorfisme van diagrammen.

bewijs: Als we eenmaal weten dat $\dim_{\mathbb{C}} W(p) = 2$ dan

is dit niet moeilijk. De graden $q(p)$, $q'(p)$ en de

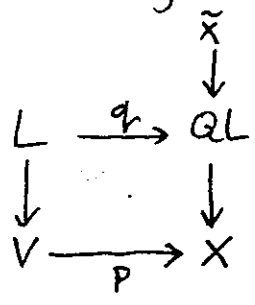
karakters $\det \bar{p}$ bepalen unieke semiinvarianten.

Voor details zie [13].

Als we nu kunnen laten zien dat voor geverieke
 $f \in W(\sigma, k)$ de strikt getransformeerde C_f in $\tilde{X}$
de exceptionele divisor slechts een maal $e(\sigma, k)$ trans-
versaal snijdt, dan is de stelling uit § 3.2 bewezen.

Dit kan door de divisor $f=0$ te vergelijken met de
krommen $C(z, k)$ uit § 3.4.

Voor de duidelijkheid nogmaals:



De strikt getransformeerde C_f van $P(\{f=0\}) \subset X$ is het zelfde als de strikt getransformeerde van $q(C'_f) \subset \mathbb{Q}L$ met C'_f de strikt getransformeerde van $f=0$ in L .

Laat nu $f \in \mathcal{W}(\mathcal{O}, k)$ generiek, $f = f_2 - \mu f_1$

Als $z \in P(V) \subset L$ en $z \notin \mathcal{O}$ dan is de functie $\frac{f_2}{f_1}$ op V' holomorfe en $\neq 0$ in z , dus voor generieke μ hebben we $z \notin C'_f$, dus C_f snijdt geen divisoren boven $q(z)$.

Als $z \in \mathcal{O}$, kies dan coördinaten in V met $z = (0:1)$

Een kromme $C \in \mathcal{C}(z, k')$ heeft de vorm:

$$C: \lambda_1 x^{k_1} - \lambda_2 y^{s-k'} = 0 \quad \text{met } s = |Gz|$$

De rationale functie $\frac{f_2}{f_1}$ heeft de vorm:

$$\frac{f_2}{f_1} = a \frac{x^k}{y^{s-k}} + \sum \frac{g_i}{h_i} \quad a \neq 0, \deg g_i = k, \deg h_i = s-k$$

en $h_i(z) \neq 0$

Als $k \neq k'$ als nadert $\frac{f_2}{f_1}$ tot nul of oneindig wanneer we naar 0 lopen volgens een tak van $C \in \mathcal{C}(z, k')$, dus $C_f \cap \mathcal{C}(z, k') = \emptyset$

Als $k = k'$ ($k \neq \frac{s}{2}$) dan nadert f_2/f_1 tot $a \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ langs $C \in \mathcal{C}(z, k)$. Hieruit kan men concluderen dat $C_f \in \mathcal{C}(z, k)$ precies in één punt snijdt. Op soortgelijke wijze kan men de rest van de beweringen van de stelling na gaan.

⊠

Dit is in het kort wat ik van de constructies van H. Knörrer begrijp.

III. De kromme van Klein.

In dit hoofdstuk zal een begin gemaakt worden met een poging om de stand van zaken uit II §2-3 te generaliseren naar andere singulariteiten van drie-holles-type. Hoewel deze singulariteiten niet meer rationaal zijn, is de constructie van deze singulariteiten (zie I §) conceptueel zo sterk gelijk aan die van de simpele, dat dit op z'n minst de moeite van het proberen waard is. In §1 zullen we de constructie uit II §3. interpreteren in termen van quasi-homogene singulariteiten en de strategie van generaliseren motiveren. In §2 worden kort de modulaire krommen besproken, terwijl §3 iets over theta-karakteristieken bevat. In §4 wordt de tensor-decompositie in $SL_2(p)$ bepaald. §5 bevat iets van de rijke meetkunde rond $SL_2(7)$ en de kromme van Klein. In §6. wordt de decompositie van $R = \bigoplus H^0(C, \mathcal{L}^k)$ (met C de kromme van Klein en $\mathcal{L}$ de invariante theta-karakteristiek) als $SL_2(7)$ -modul bepaald. §7 bevat enkele slot opmerkingen.

§1. Normale quasi-homogene oppervlakken.

In I §5 is al vermeld dat elke normale 2-dimensionale singulariteit met goede $\mathbb{C}^*$ -actie voorgesteld kan worden als $X = \text{Spec}(\oplus H^0(\mathcal{C}, \mathcal{L}^k)^G)$. Hierbij moet men naar het volgende diagram voor ogen houden:

$$\begin{array}{ccccc}
 & \tilde{X} & & E_0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 L & \longrightarrow & QL & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \{Q_i\} \longrightarrow P_i \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 CL & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\quad} & 0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Hierin is: $\mathcal{C}$ een projectieve kromme over $\mathbb{C}$, $\mathcal{L}$ een ampel lijnbundel op $\mathcal{C}$; $L = \text{Tot}(\mathcal{L}^{-1})$; G een groep van bundel automorfismen; $CL = \text{Spec}(\oplus H^0(\mathcal{C}, \mathcal{L}^k))$; $X = \text{Spec}(\oplus H^0(\mathcal{C}, \mathcal{L}^k)^G)$; verticale pijlen contracties en horizontale 'uitdelen naar G '. $\tilde{X}$ de minimaal goede resolutie van X , die ontstaat door de cyclische quotient singulariteiten van QL in P_i op te lossen; E_0 de centrale kromme. Voor een simpele singulariteit hadden we: $L = \text{Tot}(\mathcal{O}(-1))$ $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$; $CL = \text{Spec} \oplus H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(k)) \simeq \mathbb{C}^2$ en G een binaire groep, en in II § bekeken we secties $s_1, \dots, s_d$ in $(R \otimes E_p)^G$ en vormden $j_p = s_1 \wedge s_2 \wedge \dots \wedge s_d$ $d = \deg(p)$. Als semiinvariant heeft dit een divisor op X en de strikt getransformeerden in $\tilde{X}$ sneden de exceptionele divisor

op een opmerkelijke wijze.

Niets staat ons in de weg om voor een willekeurige Q.H.-singulariteit geschikte secties in $(R \otimes E_p)^G$ te kiezen, met nu $R := \bigoplus_k H^0(\mathcal{L}, \mathcal{L}^k)$ en de corresponderende divisoren op $\tilde{X}$ te bestuderen.

Nu moet men bedenken dat de voorstelling van X als baan i.h.a. verre van uniek is, en we zullen keuren voor $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^k$ en G moeten maken. Voor de driehoekssingulariteiten van type $(n, 3, 2)$ hebben we een natuurlijk model met $\mathcal{L} = Y(n)$, de modulaire kromme en $G = \text{PSL}_2(n)$. (§2).

Een quasi-homogene normale oppervlakte singulariteit heeft een natuurlijke compactificatie als $\text{Proj}(A[t]) = \bar{X}$ met $A = \bigoplus H^0(\mathcal{L}, \mathcal{L}^k)^G$ en t een onbehandelde van gewicht 1.

Dit komt neer op het toevoegen van 1 punt in oneindig voor elke G^* -baan. We hebben dan $\bar{X} - X =: \mathcal{E}_\infty \simeq \mathcal{E}$, de centrale kromme. $\bar{X}$ heeft langs $\mathcal{E}_\infty$ voor elk punt $\bar{P}_i \in \mathcal{E}_\infty$ corresponderend met de $P_i \in \mathcal{E}_\infty$ een duale cyclische quotient singulariteit (vervang de i-erel coördinaat in L door z 'n inverse etc.). Voor een driehoekssingulariteit van type

p, q, r dus gegeven $A_{p-1}, A_{q-1}, A_{r-1}$ singulariteiten.

Lossen we ook deze op dan ontstaat precies een $T_{p,q,r}$ diagram in het oneindige (in het hyperbolische geval) op $\tilde{\bar{X}}$.

De groep $SL_2(p)$ p priem heeft $p+3$ niet triviale irreducibele representaties; gelijk aan het aantal punten in de $T_{p,3,2}$ -graaf. Is het misschien mogelijk dat

de divisoren van j_p -polynomen $p \in \text{Irr}(SL_2(p))$ $p \neq 1$
 deze oneindig krommen snijden op soortgelijke wijze als
 in II §3? We zullen dan wel eerst de groep $SL_2(p)$ i.p.v.
 $PSL_2(p)$ effectief op een bundel moeten laten werken. Maar
 dit was precies ook de situatie bij de simpele singulari-
 teiten: de 2-voudige overdekking van de driehoeksgroep,
 dus de binaire groep heeft genoeg irreducibele representaties.

§2. Modulaire krommen.

Laat $\mathcal{H}$ het bovenhalf vlak $\subset \mathbb{C}$; $\mathcal{H} = \{x+iy \mid y > 0\}$

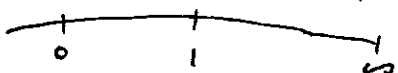
Men gaat eenvoudig na dat $\text{Aut}(\mathcal{H}) = PSL_2(\mathbb{R})$, de
 (geprojectiviseerde) groep van reële 2×2 -matrices en
 determinant 1. (zie ook I §3). Een element $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ werkt
 op de gebruikelijke wijze via gebroken lineaire transformaties
 op $\mathcal{H}$: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$. De groep $\Gamma(1) := PSL_2(\mathbb{Z})$ werkt
 als basis transformaties op $\mathcal{H}$, opgevat als ruimte van
 roosters $\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, $\tau \in \mathcal{H}$. Het quotient $\mathcal{H}/\Gamma(1) \simeq \mathbb{C}$
 classificeert elliptische krommen. Sinds klein belang
 kan ook (v.a.) de z.g. hoofdcongruentie ondergroepen $\Gamma(N)$:
 $\Gamma(N) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$.

We krijgen een exactie rij: $0 \rightarrow \Gamma(N) \rightarrow \Gamma(1) \rightarrow PSL_2(N) \rightarrow 0$
 en een vertakte overdekking $\mathcal{H}/\Gamma(N) \rightarrow \mathcal{H}/\Gamma(1) = \mathbb{C}$
 met groep $PSL_2(N)$ als overdekkingstransformaties. De
 (niet compacte) krommen $\mathcal{H}/\Gamma(N)$ classificeert nu
 elliptische krommen, samen met een basis voor de

groep van N^2 N -torsiepunten. Via de overdekkingstransformaties werkt $PSL_2(N)$ als basis transformaties. Men kan de krommen $H/\Gamma(N)$ op 'canonieke' wijze, door toevoeging van eindig veel punten (de z.g. cusps) compactiseren tot gladde krommen $Y(N)$, de z.g. modulaire krommen. $Y(1) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1$. De afbeelding $Y(N) \rightarrow Y(1) = \mathbb{P}^1$ vertakt boven 3 punten met index 2, 3, N en $Y(N)$ wordt overdekt door $z \cdot \# PSL_2(N)$ driehoeken met hoeken $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ en $\frac{\pi}{N}$. Voor $n=2, 3, 4, 5$ krijgen we de overdekkingen van $\mathbb{P}^1$ met 12, 24, 48 en 120 driehoeken terug (zie I §) met groepen $\mathbb{D}_3 = \Sigma(3, 2, 2)$, $\mathbb{D}_4 = \Sigma(2, 3, 2)$, $\mathbb{D}_5 = \Sigma(2, 3, 2)$, $\mathbb{D}_6 = \Sigma(2, 3, 2)$ respectievelijk.

Zij nu $N=p$, p priem. De groep $PSL_2(p)$ heeft, zoals men eenvoudig na rekent $\frac{1}{2}(p^2-1)p$ elementen. ($p \neq 2$)

De vertakking $Y(p) \rightarrow \mathbb{P}^1$ ziet er uit als

$$\frac{1}{4}(p^2-1)p \left\{ \begin{array}{l} x^2 \\ x \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x^3 \\ x^{\frac{1}{6}(p^2-1)p} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x^p \\ x^{\frac{1}{2}(p^2-1)} \end{array} \right.$$


Met Zeeuthen-Murwitz volgt nu dat het geslacht van de modulaire kromme $Y(p)$ is: $g_p = \frac{(p+1)(p-1)(p-6)}{24} + 1$

Dus inderdaad $g_3=0$; $g_5=0$ en $g_7=3$, $g_{11}=26$ etc.

De kromme $Y(7)$ van geslacht 3 noemen we de kromme van Klein $\mathcal{C}$. (zie [3]). Op $\mathcal{C}$ werkt de groep $PSL_2(7)$ als automorfismen. $PSL_2(7)$

is de beroemde simpele groep van orde 168, (exceptioneel) isomorf met $SL_3(2)$, de groep van automorfismen van het projectieve vlak over $\mathbb{F}_2$ (zie [7]).

Laat Ω de canonieke lijnbundel op $Y(N)$ (dus de cokerbundel). We zien dat $\text{Spec}(\bigoplus_k H^0(Y(N), \Omega^{\otimes k})^{PSL_2(N)})$ een goed model is voor de driehoekssingulariteit van type $(n, 3, 2)$. Als we iets met representaties van $SL_2(p)$ willen doen dan zullen we Ω moeten vervangen door een andere bundel, waar $SL_2(p)$ effectief op werkt. Op de basis moet $SL_2(p)$ als $PSL_2(p)$ blijven werken. (We moeten er natuurlijk wel voor zorgen dat de singulariteit niet verandert.)

§3. Theta-karakteristieken.

We gaan hier zeer kort in op de theorie der theta-karakteristieken; wortels uit de canonieke bundel. (Ik weet hier weinig van, het meeste nog via gesprekken met B. v. Geemen, zie ook [20] en [21]).

Laat C een gladde, projectieve kromme over $\mathbb{C}$, en $J(C)_2$ de 2-torsiepunten van de jacobiaan van C , natuurlijk isomorf met $H_1(C, \mathbb{Z}/2) \simeq (\mathbb{Z}/2)^{2g}$ of geslacht van C .

Een lijnbundel L heet een theta-karakteristiek als $L^2 = L \otimes L = \Omega$, met Ω de canonieke bundel op C .

Laat $\mathcal{S}(C)$ de verzameling van theta-karakteristieken op C .

Als $d \in J(\mathcal{L})_2$ en $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$ dan ook $\mathcal{L} \otimes d \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$

Als $\mathcal{L}, m \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$ dan $\mathcal{L} \otimes m^{-1} \in J(\mathcal{L})_2$.

Hieruit volgt dat de groep $J(\mathcal{L})_2$ effectief en transitief op $\mathcal{S}(\mathcal{L})$ werkt, dus $\# \mathcal{S}(\mathcal{L}) = 2^{2g}$.

Aan een $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$ voegen we een kwadratische vorm $Q_{\mathcal{L}}$ op $J(\mathcal{L})_2$ toe:

$$Q_{\mathcal{L}} : J(\mathcal{L})_2 \longrightarrow \mathbb{Z}/2; Q_{\mathcal{L}}(d) = \dim(H^0(\mathcal{L}, \mathcal{L}) \oplus H^0(\mathcal{L}, \mathcal{L} \otimes d)) \bmod 2$$

$$\text{Laat } \varepsilon : J(\mathcal{L})_2 \times J(\mathcal{L})_2 \longrightarrow \mathbb{Z}/2; (d, \beta) \longmapsto \varepsilon(d, \beta)$$

het snij product, waarbij we d en β opvatten als elementen in $H_1(\mathcal{L}, \mathbb{Z}/2)$.

Dan hebben we:

$$\text{lemma: i) } Q_{\mathcal{L} \otimes d}(\beta) = Q_{\mathcal{L}}(\beta) + \varepsilon(d, \beta)$$

$$\text{ii) } Q_{\mathcal{L}}(d \otimes \beta) = Q_{\mathcal{L}}(d) + Q_{\mathcal{L}}(\beta) + \varepsilon(d, \beta)$$

$$\text{iii) } \mathcal{L} \longmapsto Q_{\mathcal{L}} \text{ is een bijectie tussen theta-}$$

karakteristieken en kwadratische vormen die aan ii) voldoen.

bewijs: zie [20].

Wanneer we een symplectische basis $d_1, \dots, d_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ voor $J(\mathcal{L})_2$ kiezen dan ziet een Q met eigenschap ii) er uit als

$$Q(x) = \sum_{i=1}^g \varepsilon_i \xi_i + \sum_{i=1}^g \varepsilon'_i \eta_i + \sum_{i=1}^g \xi_i \eta_i \quad \text{met } x = \sum \xi_i d_i + \sum \eta_i \beta_i$$

De klassieke notatie voor zo'n theta-karakteristiek is dan ook:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_g \\ \varepsilon'_1 & \varepsilon'_2 & \dots & \varepsilon'_g \end{bmatrix} \quad \text{met } \varepsilon_i, \varepsilon'_i = 0 \text{ of } 1.$$

Een theta-karakteristiek $\mathcal{L}$ heet even resp. oneven als $\dim H^0(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ dat is. Er geldt:

$$\mathcal{L} \text{ even} : \sum \varepsilon_i \cdot \varepsilon'_i \text{ even}$$

$$\mathcal{L} \text{ oneven} : \sum \varepsilon_i \cdot \varepsilon'_i \text{ oneven}$$

(Dit is precies de Arf invariant van $Q_{\mathcal{L}}$)

Er zijn $z^{g-1}(z^g+1)$ even en $z^{g-1}(z^g-1)$ oneven
theta karakteristieken. De punten van $\Omega_L=0$ zijn precies
de punten waarmee men L kan verschuiven zonder dat het
type, d.w.z. even of oneven, verandert.

Wanneer we een kromme C met $G \subset \text{Aut}(C)$ hebben
en we willen een extensie $0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 0$ op
een theta-karakteristiek laten werken dan zullen we op
z'n minst een G -invariante kwadratie met eigenschap ii)
op $H_1(C, \mathbb{Z}/2)$ moeten hebben.

Het is een klein wonder dat dit voor de modulaire
krommen $Y(p)$ en $G = \text{PSL}_2(p)$ lukt (ten minste: als ik
mij niet vreselijk vergis.)

propositie: Er is een theta-karakteristiek L op $Y(p)$
waar $\text{SL}_2(p)$ effectief op werkt; $L/\mathbb{Z}/2 = \Omega$ waarbij
 $\mathbb{Z}/2$ het centrum van $\text{SL}_2(p)$ is.

bewijs: Laat Ω_H de coraakbundel aan H ; Dus topologisch
 $\Omega_H = H \times \mathbb{C}$, met $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ actie:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z, dz) = \left(\frac{az+b}{cz+d}, \left(\frac{1}{cz+d} \right)^2 dz \right)$$

Laat $\sqrt{\Omega}_H$ de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ bundel $H \times \mathbb{C}$ met actie:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z, \sqrt{dz}) = \left(\frac{az+b}{cz+d}, \frac{1}{cz+d} \sqrt{dz} \right)$$

Merck op: $\sqrt{\Omega}_H^{\otimes 2} = \Omega_H$ en $\sqrt{\Omega}_H / \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \simeq \Omega_H$, en
 $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ werkt gewoon als $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ op de basis H .

Beschouw: $0 \rightarrow \Pi(p) \rightarrow \Pi(1) \rightarrow \text{PSL}_2(p) \rightarrow 0$
 $\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\text{ker } \varphi \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi} \text{SL}_2(p) \rightarrow 0$
 $\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2$

kerel werkt op $\sqrt{\Omega_H}$ vrij en op de basis als $\Gamma(P)$.

Het quotiënt is na compactificatie de (totale ruimte van) de gevraagde theta karakteristiek $\mathcal{L}$ op $Y(P)$ $\square$

Een andere manier om dit te zien is direct naar de driehoeksgroepen te kijken. We hebben $Y(P) = H/N$ en

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & \widetilde{\Sigma} & \rightarrow & PSL_2(P) \rightarrow 0 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \widetilde{N} & \rightarrow & \widetilde{\Sigma} & \xrightarrow{\ell} & SL_2(P) \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z}/2 \end{array}$$

Hierin is Σ de uitgebreide driehoeksgroep $\subset \widetilde{\text{Aut}}(H)$ (zie I §) en $\widetilde{\text{Aut}}(H)$ werkt op de universele overdekking

$F := H \times \mathbb{C}$ van $H \times \mathbb{C}^* = \Omega_H^*$. Uitdelen van F naar $\widetilde{N} \subset \widetilde{\text{Aut}}(H)$ levert nu het complement van de nulruimte van (de totale ruimte van) een lijnbundel $\mathcal{L}$ op $H/N = Y(P)$

Voor ℓ kan men nemen: $x \mapsto -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $y \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $z \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (zie [4]). Het element $d = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ werkt triviaal op de basis van $\mathcal{L}$, maar in de versels als $x \mapsto -x$.

Gevolg: $\dim H^0(Y, \mathcal{L}^{2k+1})^{SL_2(P)} = 0$

Zij immers s een sectie in $\mathcal{L}^{2k+1}$, dan

$d s(x) = -s(x)$, dus als $s \in H^0(Y, \mathcal{L}^{2k+1})^{SL_2(P)}$ volgt $s(x) = 0$. $\square$

Een ander model voor de driehoekssingulariteit van type $(P, 3, 2)$ is dus $\text{Spec}(\oplus H^0(Y(P), \mathcal{L}^k)^{SL_2(P)})$. Merk op dat slechts de gradering van de ring veranderd is.

§4. Irreducibele karakters van $SL_2(P)$.

F. Klein ontdekt, door de modulaire kromme m.b.v. 'Theta-Nullwerte' in te bedden (zie [22]) de laagst dimensionale representatie van $(P)SL_2(P)$, in dimensie $\frac{p-1}{2}$. Frobenius vindt, als een van de eerste toepassingen van karaktertheorie, de karakter tabel van $SL_2(P)$.

We geven een summierende beschrijving van deze karakters gebaseerd op [23].

Laat nu verder p een priemgetal > 2 .

De groep $SL_2(P)$ heeft $p(p+1)(p-1)$ elementen en $p+4$ conjugatieklassen. Represantanten van deze klassen en aantal elementen in zo'n klasse vindt men in onderstaende tabel:

	1	-1	a^l	b^m	c	d	-c	-d
#	1	1	$p(p+1)$	$p(p-1)$	$\frac{1}{2}(p^2-1)$	$\frac{1}{2}(p^2-1)$	$\frac{1}{2}(p^2-1)$	$\frac{1}{2}(p^2-1)$

Hierin is $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $-1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $a = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}$; $c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $d = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ met d voortbrenger van $\mathbb{F}_p^*$, en b een element van orde $p+1$, niet diagonaliseerbaar over $\mathbb{F}_p$. $1 \leq l \leq \frac{p-3}{2}$; $1 \leq m \leq \frac{p-1}{2}$.

Net zoals er ruwweg 2 'reeksen' van conjugatieklassen zijn 2 series van irreducibele representaties.

De serie die 'bij a hoort' verkrijgt men als volgt:

Laat $T = \langle a \rangle$ en $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \beta \in \mathbb{F}_p \right\}$; $B = TU$ is de

groep van boven driehoekige matrices. T heeft $p-1$ karakters

$$\lambda_i(a^k) = \tau^{ik} \quad i=1, \dots, p-1; \tau \text{ primitieve } (p-1)\text{-e e.k. wortel.}$$

Door λ_i uit te breiden tot B door $\lambda_i(x) = 1 \quad x \in U$ te zetten en dan te induceren verkrijgen we $p-1$ karakters

$\zeta_i \quad i=1, \dots, p-1$. De $\zeta_i \quad i=1, 2, \dots, \frac{p-3}{2}$ blijven irreducibel

te zijn (van graad $p+1$), terwijl $\zeta_0 = 1 + \psi$ met ψ irreducibel (van graad p , het Steinberg karakter; dit is het permutatie karakter van de werking van $SL_2(p)$ op de projectieve lijn over FP); $\zeta_{\frac{p-1}{2}} = \zeta_+ + \zeta_-$ met ζ_+, ζ_- irreducibel van graad $\frac{p+1}{2}$. Verder $\zeta_i = \zeta_{-i}$ (reken met de index mod $(p-1)$)

De 2^e reeks van karakters is $\theta_i = \zeta_i(\psi-1) - \phi_i$

$1 \leq i \leq \frac{p+1}{2}$ waarbij de ϕ_i geïnduceerd zijn van de cyclische groep voortgebracht door b . Het blijkt: ~~$\theta_i = \psi - 1$~~

θ_i irreducibel van graad $p-1$ voor $i=1, \dots, \frac{p-1}{2}$ en

$\theta_{\frac{p+1}{2}} = \theta_+ + \theta_-$ met $\theta_{\pm}$ irreducibel van graad $\frac{p-1}{2}$

De bijbehorende representaties zijn echter vrij lastig in handen te krijgen. De karaktertabel is:

	1	ψ	ζ_i	ζ_+	ζ_-	θ_i	θ_+	θ_-
1	1	p	$p+1$	$\frac{1}{2}(p+1)$	$\frac{1}{2}(p+1)$	$p-1$	$\frac{1}{2}(p-1)$	$\frac{1}{2}(p-1)$
-1	1	p	$(-1)^i(p+1)$	$\frac{1}{2}\varepsilon(p+1)$	$\frac{1}{2}\varepsilon(p+1)$	$(-1)^i(p-1)$	$-\frac{1}{2}\varepsilon(p-1)$	$-\frac{1}{2}\varepsilon(p-1)$
a^l	1	1	$\tau^{il} + \tau^{-il}$	$(-1)^l$	$(-1)^l$	0	0	0
b^m	1	-1	0	0	0	$-(\sigma^{im} + \bar{\sigma}^{im})$	$(-1)^{m+1}$	$(-1)^{m+1}$
c	1	0	1	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{\varepsilon p})$	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{\varepsilon p})$	-1	$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{\varepsilon p})$	$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{\varepsilon p})$
d	1	0	1	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{\varepsilon p})$	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{\varepsilon p})$	-1	$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{\varepsilon p})$	$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{\varepsilon p})$

met $\varepsilon = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

Het berekenen van de tensor decompositie is volstrekt recht toe recht aan.

In essentie is het resultaat heel eenvoudig.

We breiden de notatie uit: $\theta_0 = 4-1$ en we zetten $\theta_i = \theta_{-i}$ (indices voor de θ 's mod $p+1$).

resultaat: Laat $\langle \phi \chi \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) \chi(g) \psi(g)$. Dan:

$$\langle z_i z_j z_k \rangle = D_{ijk}$$

$$\langle z_i z_j \theta_k \rangle = C_{ijk}$$

$$\langle z_i \theta_j \theta_k \rangle = C_{ijk}$$

$$\langle \theta_i \theta_j \theta_k \rangle = E_{ijk}$$

$$D_{ijk} = \delta_{i+j+k} + \delta_{i+j-k} + \delta_{i-j+k} + \delta_{i-j-k} + (1+(-1)^{i+j+k})$$

$$C_{ijk} = 1 + (-1)^{i+j+k}$$

$$E_{ijk} = -(\delta_{i+j+k} + \delta_{i+j-k} + \delta_{i-j+k} + \delta_{i-j-k}) + (1+(-1)^{i+j+k}).$$

(n.b: bij de D functie: indices mod $p-1$; bij E mod $p+1$).

Het probleem is om ook de uitdrukkingen $\langle \psi \theta^+ z^- \rangle$ etc. te berekenen. Dit is wat lastiger; in Appendix II

is het complete resultaat vermeld. M.b.v. deze formules

is het nu eenvoudig om tensor producten in $SL_2(p)$ te berekenen. Tabellen voor de matrices A^x (zie II §)

vindt men eveneens in Appendix II.

§ 5. De meetkunde van $PSL_2(7)$.

In deze § vertellen we iets over de prachtige meetkunde geassocieerd met $\mathcal{C} := Y(7)$ en de simpele groep van orde 168, $PSL_2(7)$. Voor details en expliciete berekeningen zij de lezer verwezen naar het oorspronkelijke artikel van Klein [20].

§ 5.1 De 168-bladige overdekking $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$

vertakt boven 3 punten; 0, 1 en ∞ met index 3, 2 en 7 resp. Het Riemann-oppervlak $\mathcal{C}$ wordt bedekt door 2×168 driehoeken met hoeken $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{7}$ (zie omslag: de identificaties langs de randen zijn een beetje lastig te begrijpen.)

De actie van $PSL_2(7)$ op $\mathcal{C}$ heeft 3 speciale banen:

24 punten (type a) boven ∞ ; $\text{Stab}(a) = \mathbb{Z}/7$.

56 punten (type b) boven 0; $\text{Stab}(b) = \mathbb{Z}/3$.

84 punten (type c) boven 1; $\text{Stab}(c) = \mathbb{Z}/2$.

Omdat $\mathcal{C}$ niet hyperelliptisch is ($PSL_2(7)$ heeft geen 2-dimensionale (niet triviale) representaties!) wordt $\mathcal{C}$, zoals elke niet-hyperelliptische kromme van geslacht 3, door zijn canoniek lineair systeem ingebed als een vlakke kromme van graad 4, en $PSL_2(7)$ werkt dan via zijn 3-dimensionale representatie op $\mathbb{P}^2$ en heeft de vgl. van $\mathcal{C}$ als 4^e graadsinvariant.

Nu heeft elke 4^e graads kromme 24 buigpunten, 20 bitangenten en 84 sextactische punten. Omdat bij transformatie buigpunten in buigpunten overgaan etc, volgt nu dat de punten uit baan a de buigpunten zijn, die uit baan b de punten waar de bitangenten raken en baan c de sextactische punten bevat.

§5.2. Het is recht toe recht aan om na te gaan dat

$PSL_2(7)$ de volgende elementen en ondergroepen bevat zie [20]:

elementen: 1 element van orde 1

21 elementen 2 ; 1 conjugatie klasse

56 " 3 ; 1

48 " 7 ; 2

42 " 4 ; 1

ondergroepen: (21 geconjugeerde $\mathbb{Z}/2$'s, 28 geconjugeerde $\mathbb{Z}/3$'s, 21 geconjugeerde $\mathbb{Z}/4$'s, 8 geconjugeerde $\mathbb{Z}/7$'s.)

plus: 14 $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ twee klassen van 7

28 S_3 allen geconjugerd ; = $\text{Nor}(\mathbb{Z}/3)$

een $\mathbb{Z}/2$ zit in 4 S_3 's.

21 $\widetilde{D}_4 = D_4$ allen geconjugerd = $\text{Nor}(\mathbb{Z}/2)$

8 G_{21} (niet abels) allen geconjugerd = $\text{Nor}(\mathbb{Z}/7)$

elke $\mathbb{Z}/3$ zit in 2 reihe.

14 $\mathbb{Q} = S_4$ twee klassen van 7.

14 $\Pi = A_4$ " " "

Hieruit volgen tal van interessante meetkundige feiten:

- i) Omdat de stabilisator van een sextactisch punt $\mathbb{Z}/2$ is en omdat er 84 sextacten zijn en maar 21 $\mathbb{Z}/2$'s volgt dat een $\mathbb{Z}/2$ 4 sextacten op hun plaats houdt.
Omdat een projectieve transformatie van orde 2 een perspectiviteit is hebben we dat de 21 assen van deze perspectiviteiten deze 84 punten uitsnijden. Het product van deze 21 assen levert een invariant van graad 21.
- ii) Omdat $\mathcal{C}$ van graad 4 is, snijdt de raaklijn in een buigpunt de kromme in ~~een~~ nog een ander punt, noodzakelijk weer een buigpunt van $\mathcal{C}$ ($\neq$ het oorspronkelijke). Nu is de stabilisator van een buigpunt een $\mathbb{Z}/7$, waar er 8 van zijn, terwijl er 24 buigpunten waren. Dit betekent dat een $\mathbb{Z}/7$ precies 3 buigpunten vasthoudt. Het gevolg is dat een keten van buigpunt-raaklijn-buigpunt-... na 3 stappen sluit; de 24 buigpunten vallen uit een in 8 buigpunts driehoeken. Door een buigpunts driehoek als coördinaat assen te nemen vindt Klein snel een vergelijking voor $\mathcal{C}$: $x^3y + y^3z + z^3x = 0$.
(Voor een andere manier om deze invariant van graad 4 te vinden zie [5]).
- iii) Klein laat zien dat elke octaëdrale ondergroep $\mathcal{Q}$ een kegelsnede invariant laat die $\mathcal{C}$ in 8 bitangent punten snijdt. Het product van 7 van zulke kegelsneden geeft een invariant van graad 14 die alle

bitangent punten uitsnijdt.

De hessiaan van graad 6 die de buigpunten uitsnijdt is een invariant die we kunnen toevoegen om een volledig systeem van invarianten van $PSL_2(7)$ te krijgen.

Samenvattend hebben we:

ϕ_4 invariant van graad 4; $\phi_4 = x^3y + y^3z + z^3x$

ϕ_6 " " " 6; snijdt buigpunten uit.

ϕ_{14} " " " 14; snijdt bitangentpunten uit.

ϕ_{21} " " " 21; snijdt sextactische punten uit.

De ring van $PSL_2(7)$ -invarianten wordt hier door voort gebracht en er is een unieke relatie van de vorm:

$$\phi_{21}^2 + \phi_{14}^3 + \phi_6^7 + \phi_4 \cdot F(\phi_6, \phi_{14}, \phi_{21}) = 0$$

(zie [5]).

De ring van de driehoekssingulariteit $(2, 3, 7)$ was:

$$R = \bigoplus_n H^0(\mathcal{L}, \Omega^n)^{PSL_2(7)}$$

Omdat $\mathcal{L}$ canoniek ingebed is, is $H^0(\mathcal{L}, \Omega^n) =$

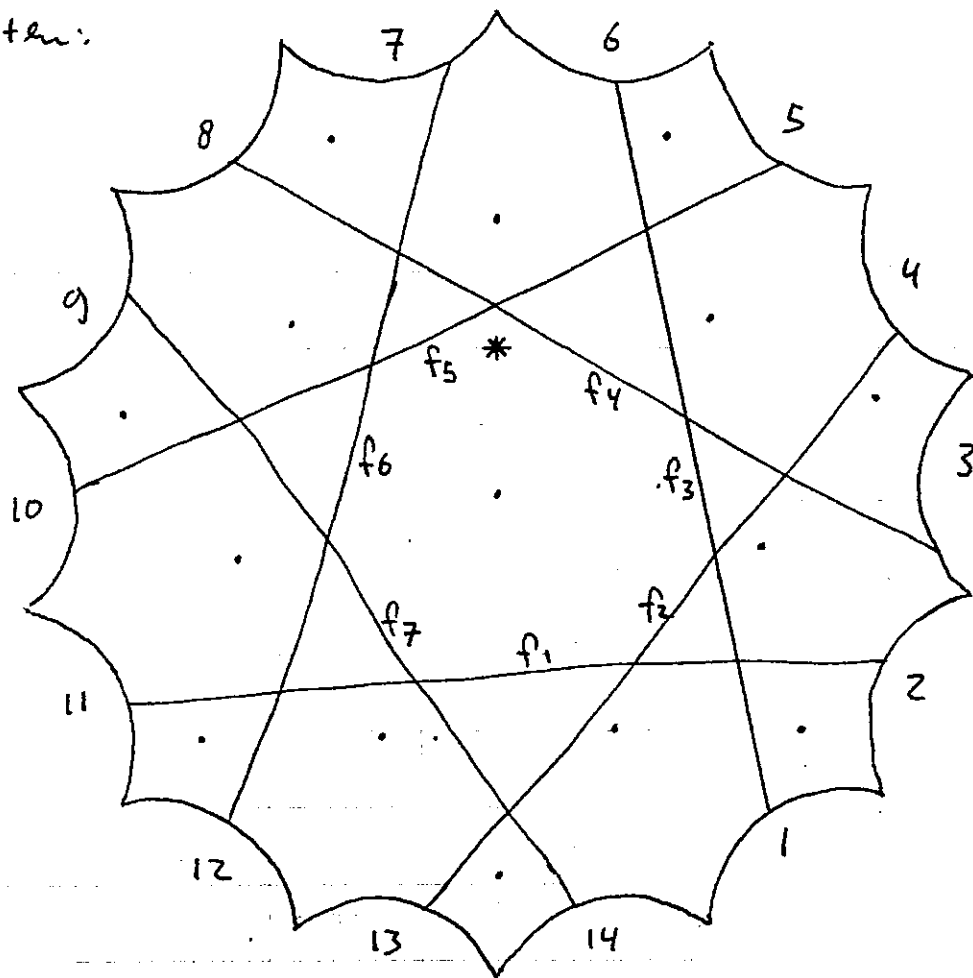
{vormen van graad n in x, y, z } modulo {vormen die op $\mathcal{L}$ verdwijnen}. Dus $R = \mathbb{C}[\phi_6, \phi_{14}, \phi_{21}] / (\phi_{21}^2 + \phi_{14}^3 + \phi_6^7)$.

Er is natuurlijk nog veel meer over de ondergroepen (e meetkundige configuraties die hier wel samen-
komen te vertellen. (Ik hoop hier later nog eens op
te komen)

§ 5.3 In § hebben we gezien dat ℓ een invariante theta karakteristiek heeft. Iets wat merkwaardig genoeg bij Klein ontbreekt is een behandeling van de actie van $PSL_2(7)$ op de theta karakteristieken. $PSL_2(7)$ werkt op $H_1(\ell, \mathbb{Z}/2) \cong (\mathbb{Z}/2)^6$ met behoud van de symplectische snijvorm; we krijgen dus een $PSL_2(7) \hookrightarrow Sp(6, \mathbb{Z})$. $Sp(6, \mathbb{Z})$ is de groep van symplectische 6×6 matrices over $\mathbb{F}_2$, isomorf met de Weyl groep van E_7 modulo centrum.

We bekijken nu de actie van $PSL_2(7)$ op $H_1(\ell, \mathbb{Z}/2)$ (en daarmee ook op de theta karakteristieken).

De 'Hauptfigur' van Klein verlegt daarbij goede diensten:



We beschouwen de elementen $f_1, \dots, f_7 \in H_1(\ell, \mathbb{Z}/2)$

Duidelijk is: i) de f_i zijn voortbrengers

$$\text{ii) } \sum f_i = 0.$$

De actie van een element van orde 7 $\in \text{PSL}_2(7)$ op deze cyclus is duidelijk; draaiing om het middelpunt geeft $f_i \rightarrow f_{i+1} \pmod{7}$.

De actie van het element van orde 2, rotatie om * in de figuur is minder eenvoudig te zien; men moet zeer zorgvuldig op de identificaties letten.

Het resultaat is:

$$f_1 \mapsto f_1 + f_3 + f_6$$

$$f_2 \mapsto f_7 + f_3$$

$$f_7 \mapsto f_2 + f_6$$

$$f_3 \mapsto f_6$$

$$f_6 \mapsto f_3$$

$$f_4 \mapsto f_4$$

$$f_5 \mapsto f_5$$

Laat $x, y, z \in \text{PSL}_2(7)$ die voldoen aan $x^7 = y^3 = z^2 = xyz = 1$

Dan $y = x^{-1}z$, dus m.b.v. de actie van x en z kunnen we ook de actie van een element van orde 3.

Een matrix van de vorm $\begin{pmatrix} A & Q \\ Q & B \end{pmatrix}$ is symplectisch $\Leftrightarrow A^{-1T} = B$, zoals men snel na relevant.

Het element $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}_3(\mathbb{Z})$ heeft orde 7 en

$A^{-1T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. We zoeken nu een symplectische basis

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3$ z.d.d. het element van orde 7 in $\text{PSL}_2(7)$ voorgesteld wordt door $[(A), (A^{-1T})]$

(notatie: $\begin{pmatrix} A & Q \\ Q & B \end{pmatrix} = [A, B]$).

Door uit schrijven blijkt dan dat er op permutatie der d 's en β 's maar een mogelijke keuze is:

$$d_1 = g_1 + g_4 + g_5 + g_6 \quad \beta_1 = g_2 + g_4 + g_5 + g_6$$

$$d_2 = g_1 + g_2 + g_6 \quad \beta_2 = g_1 + g_2 + g_3 + g_6$$

$$d_3 = g_3 + g_5 + g_6 \quad \beta_3 = g_3 + g_4 + g_6$$

met $g_i = f_i + f_{i+1}$.

Het wonderlijke is nu dat t.o.v. deze basis ook de elementen y (en z) in blok vorm verschijnen:

$$x \mapsto \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$y \mapsto \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$z \mapsto \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

M.a.w. in de natuurlijke representatie van $PSL_2(7)$ op $H_1(\ell, \mathbb{Z}/2)$ komt $PSL_2(7)$ diagonaal in de vorm van $SL_3(2)$ in $Sp(6, 2)$ te liggen.

De kromme ℓ heeft $2^{2.3} = 64$ theta karakteristieken; 36 even en 28 oneven (die corresponderen met de 28 bitangenten; de twee raakpunten van een bitangente geven een divisor $P+Q$ met $2(P+Q)=K$, K canonieke divisor).

Door na rekenen vindt men:

propositie: Onder de actie van $PSL_2(7)$ vallen de theta karakteristieken in de volgende banen uitlen.

I. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; II. $\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rangle$; III. $\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rangle$; IV. $\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rangle$ (even)
en $\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rangle$ (oneven).

De lengtes van de banen zijn: 1, 7, 7, 21; 28.

Er is dus blijkbaar een unieke invariante theta -

karacteristiek, d.w.z. voor de karakteristiek uit § hadden we geen andere keuze. Of dit voor $p > 7$ ook zo is, is onduidelijk.

§ 6. Poincaré reeksen.

In deze § bepalen we de Poincaré reeksen

$$Q_p(T) := \sum_k \dim_{\mathbb{C}} (H^0(\mathcal{L}, \mathcal{L}^k) \otimes E_p)^G T^k \quad G = SL_2(7)$$

met $\mathcal{L} = \mathcal{Y}(7)$ en $\mathcal{L}$ de invariante theta-karakteristiek, voor elke irreducibele representatie p van $SL_2(7)$.

$SL_2(7)$ heeft 11 irreducibele representaties (zie §4).

Die geven we aan met:

	1	ψ	χ_1	χ_2	χ_+	χ_-	θ_1	θ_2	θ_3	θ_+	θ_-
graad	1	7	8	8	4	4	6	6	6	3	3
waarde in -1	1	7	-8	8	-4	-4	-6	6	-6	3	3

De karakters $1, \psi, \chi_2, \theta_2, \theta_+$ en θ_- zijn triviaal op de kern van $SL_2(7) \rightarrow PSL_2(7)$, dus zijn in feite karakters van $PSL_2(7)$.

§ 6.1 De even graden.

Zoals al eerder gezegd is de kromme $\mathcal{C}$ canoniek in $\mathbb{P}^2$ ingebed, waarop $\text{Aut}(\mathcal{C})/SL_2(7)$ via θ_+ werkt.

De ring $\bigoplus H^0(\mathcal{C}, \mathcal{L}^{2k})$ kunnen we identificeren met de affiene ring van de kegel over $\mathcal{C}$, ofwel

R/ϕ_4 met $R = \mathbb{C}[x, y, z]$ en ϕ_4 de vgl. van $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2$

We berekenen daarom eerst:

$$P_p^*(T) := \sum \dim_{\mathbb{C}}(R_i \otimes E_p)^{PSL_2(\mathbb{F})} \cdot T^i$$

Dan geldt:

$$\begin{aligned} P_p(T) &:= \sum \dim_{\mathbb{C}}(H^0(\mathcal{C}, \mathcal{L}^{2k}) \otimes E_p)^{PSL_2(\mathbb{F})} T^k \\ &= P_p^*(T) \cdot (1 - T^4). \end{aligned}$$

De berekening van P_p^* kan men doen met Molien's formule. Er is echter een meer eenvoudige methode, die gebruik maakt van de representatie graaf van θ^+ , net als in II §3.5.

Propositie: Laat $\mathbb{C}$ een 3-dimensionale representatie van een eindige groep G , verband via $\mathbb{C}$

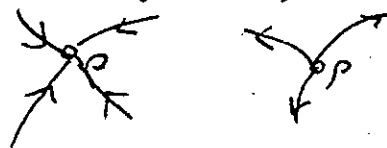
op V . Zij $R = \text{Sym}(V)$ en $P_p(T) = \sum \langle R_i | p \rangle T^i$

Stel dat $\Lambda^2 \mathbb{C} = \bar{\mathbb{C}}$ en $\Lambda^3 \mathbb{C} = 1$ (zoals bij θ_+ het geval is.) Dan: voor $p \neq 1$

$$P_p(T) (1 - T^3) = \sum a_{p'p} P_{p'}(T) T - \sum a_{pp'} P_{p'}(T) \cdot T^2$$

Hierin is $a_{p'p}$ de decompositie matrix van $\mathbb{C}$.

De eerste term aan de rechter zijde stelt de 'stroming naar p toe' en de tweede 'stroming van p af' in de representatie graaf voor:



bewijs: (vgl. [12]). Als element in $R(G)$ is de ring R gelijk aan $\bigoplus \text{Sym}^k(\mathbb{C})$ en zet

$$\begin{aligned} [R](T) &= \bigoplus_k \text{Sym}^k(\mathbb{C}) T^k \in R(G)[[T]] \\ &= \left(\sum A(1 + T^k(\mathbb{C}) (-1)^k T^k) \right)^{-1} \end{aligned}$$

Verder $[R] = \bigoplus_{\rho, i} \langle R_i | \rho \rangle \rho \in R(G)$

$$\text{en } [R](T) = \bigoplus_{\rho, i} \langle R_i | \rho \rangle \rho T^i \in R(G)[[T]] \\ = \sum_{\rho} \rho P_{\rho}(T).$$

Dit combineren geeft: $1 = \sum_{\rho} \rho P_{\rho}(T) \sum (-1)^k A 1 +^k(c) T^k$

Als $c: G \hookrightarrow SU_2(\mathbb{C})$ dan $\Lambda^0 c = 1$; $\Lambda^1 c = c$; $\Lambda^2 c = 1$.

($\Lambda = A 1 +$) dus: $1 = \sum_{\rho} \rho P_{\rho}(T) (1 - cT + T^2)$

In product nemen met een $\rho' \neq 1$ geeft dan:

$$0 = P_{\rho'}(T) \cdot (1 + T^2) - \sum_{\rho} \langle c \otimes \rho | \rho' \rangle P_{\rho}(T) \cdot T$$

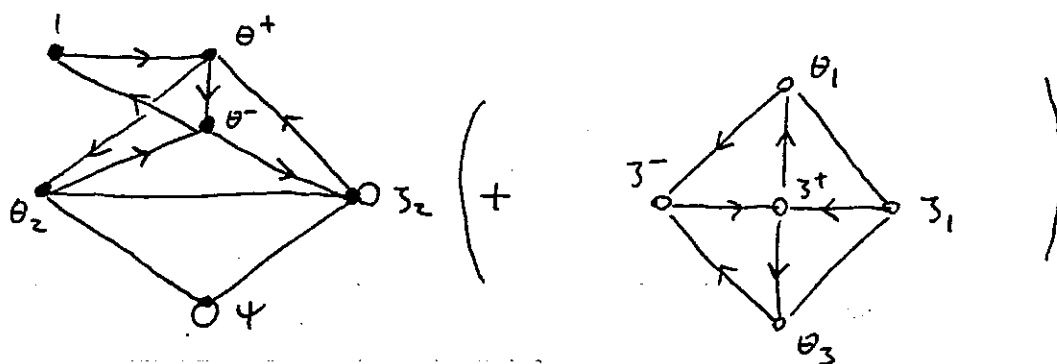
hetgeen weer komt op de formule die in II § 3.5 werd gebruikt.

Als $c: G \hookrightarrow SU_3(\mathbb{C})$ en $\Lambda^2 c = \bar{c}$ dan komt er:

$$1 = \sum_{\rho} \rho P_{\rho}(T) (1 - cT + \bar{c}T^2 + T^3)$$

hetgeen na wat manipulaties de bewijzing geeft. □

Bovenstaande formule kan weer gebruikt worden om, langs de representatiegraaf lopend, relaties tussen de P_{ρ}^* te vinden. Die graaf ziet er als volgt uit:



Eerlijkheden halve moet ik bekennen dat ik de $P_{\rho}^*(T)$

eerst m.b.v. Mollen's formule heb berekend, en
daarna m.b.v. bovenstaande relaties gecontroleerd heb.

Ik vind voor de $P_p^*(T)$:

Resultaat:

$$P_1^*(T) = (1 + T^{21}) / (1 - T^4)(1 - T^6)(1 - T^{14})$$

$$P_4^*(T) = T^3 / (1 - T^2)(1 - T^3)(1 - T^4)$$

$$P_{3_2}^*(T) = T^4 / (1 - T)(1 - T^3)(1 - T^7)$$

$$P_{\theta_2}^*(T) = T^2(1 + T^6) / (1 - T^2)(1 - T^4)(1 - T^7)$$

$$P_{\theta_+}^*(T) = T(1 - T^2 + T^6) / (1 - T^2)(1 - T^4)(1 - T^7).$$

$$P_{\theta_-}^*(T) = T^3(1 - T^4 + T^6) / (1 - T^2)(1 - T^4)(1 - T^7).$$

en de polynomen $P_p(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{C}}(H^0(\mathcal{L}, \mathcal{L}^{2k}) \otimes E_p)^{\vee} T^k$

ontstaan door $P_p^*(T)$ met $1 - T^4$ te vermenigvuldigen.

De karakters die niet triviaal op $\ker \rightarrow SL_2(7) \rightarrow PSL_2(7)$
zijn, verschijnen natuurlijk niet in de even graden, an-
dat door effectief $PSL_2(7)$ werkt.

§ 6.2. De oneven graden.

73

Kwamen in de even graden slechts de PSL-karakters voor, in de oneven graden is het net anders om:

$(H^0(\mathcal{L}, \mathcal{L}^{2k+1}) \otimes E_p)^G = 0$ voor $p=1, 4, 3_2, \theta_2, \theta^+, \theta^-$ om dezelfde reden dat $H^0(\mathcal{L}, \mathcal{L}^{2k+1})^G = 0$ (§3.).

Het is niet direct duidelijk hoe men $H^0(\mathcal{L}, \mathcal{L}^{2k+1})$ in het algemeen berekent.

De eerste opmerking is dat $H^0(\mathcal{L}, \mathcal{L}) = 0$. Immers, als $\mathcal{L}$ een sectie zou hebben, dan was er een effectieve divisor van graad 2, zeg $P+Q$, met $2(P+Q) = K$, canonieke divisor. Dit betekent dat P en Q bitangente punten zijn en die waren juist oneven, terwijl $\mathcal{L}$ even is.

Klein geeft een basis voor $H^0(\mathcal{L}^3)$ (Vander: $H^0(\mathcal{L}, \mathcal{L}^4) = H^0(\mathcal{L}^4)$) aan in de vorm van wortels uit 3^e graad vormen die overal aan $\mathcal{L}$ raken:

$$A_0 = \sqrt{xyz}; A_1 = \sqrt{-y^3 - z^2x}; A_2 = \sqrt{-z^3 - x^2y}; A_3 = \sqrt{-x^3 - y^2z}.$$

We hebben een afbeelding $H^0(\mathcal{L}^3)^{[2]} \rightarrow H^0(\mathcal{L}^6)$

($[k] = k^e$ symmetrische macht). (Men moet in de gaten houden dat volgens §6.1 we de $H^0(\mathcal{L}^{2k})$ als $SL_2(7)$ -module kennen), waarvan men snel kan zien dat het een isomorfisme is: $H^0(\mathcal{L}^3)^{[2]} \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{L}^6) = \theta_+^{[3]}$

Hieruit volgt: $H^0(\mathcal{L}^3) \cong 3_-$.

Vander hebben we een hele hoop afbeeldingen

$$H^0(\mathcal{L}^k) \otimes H^0(\mathcal{L}^l) \rightarrow H^0(\mathcal{L}^{k+l})$$

die alle maal $SL_2(7)$ -equivariant moeten zijn.

Door hier nu mee te gaan 'spelen' vindt men bijvoorbeeld $H^0(\mathbb{L}^5) = \mathbb{Z}_1$; $H^0(\mathbb{L}^7) = \mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_+$

De berekeningen langs deze weg worden echter steeds moeilijker met het stijgen van de graad.

In een nog niet gepubliceerd artikel schrijft Catanese [23] voor een willekeurige vlakke kromme (zeg glad) en $\mathbb{L}$ een theta-karakteristiek, een exacte rij op van de vorm

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^4 H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n-2)) \xrightarrow{A} \bigoplus_{i=1}^4 H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n-1)) \rightarrow H^0(\mathbb{L}^{2n+1}) \rightarrow 0$$

in ons geval. (Tot mijn spijt moet ik bekennen dat ik zeer weinig van het artikel begrijp)

Gebaseerd op de berekening van $H^0(\mathbb{L}^n)$ voor kleine waarden van n kom ik tot de volgende:

benaming: In ons geval is de rij

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^+ \otimes H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n-2)) \rightarrow \mathbb{Z}^- \otimes H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n-1)) \rightarrow H^0(\mathbb{L}^{2n+1}) \rightarrow 0$$

$SL_2(7)$ -invariant exact.

Omdat ik Catanese's resultaat niet goed begrijp, heb ik dit nog niet kunnen bewijzen. Dat het heel waarschijnlijk goed is blijkt uit het feit dat al mijn berekeningen blijven kloppen (en dat is een hele kunst).

Wie kan dit bewijzen? Misschien is het triviaal. Als we aannemen dat de benaming waar is (en ik wil dat risico wel nemen), dan kan men

d.m.v. deze exacte rij de poimcaré reeks

$\sum \dim_{\mathbb{C}}(H^0(\mathcal{L}^{2n+1}) \otimes E_{\bar{p}})^{SL_2(\mathbb{Z})} =: R_p(T)$ uitdrukken
in in § 6.1 uitgedrukte reeksen.

Er komt dan:

$$R_p(T) = T \sum_{\chi} \langle \zeta^- \otimes \chi | \rho \rangle P_{\chi}^*(T) - T^2 \sum_{\chi} \langle \zeta^+ \otimes \chi | \rho \rangle P_{\chi}^*(T)$$

Merk op dat dit veel lijkt op de formule uit § 6.1.

§ 6.3 Tabel.

We zijn nu in de positie dat we de sectie ruimten $H^0(\mathcal{L}^k)$ als $SL_2(\mathbb{Z})$ -modul kunnen uitrekenen:

$H^0(\mathcal{L}^2) = \theta_+$	$\dim: 3$	$H^0(\mathcal{L}^{10}) = \psi + \zeta_2 + \theta_-$	$\dim: 10$
$H^0(\mathcal{L}^3) = \zeta_-$	4	$H^0(\mathcal{L}^{11}) = \zeta_1 + \theta_1 + \theta_3$	20
$H^0(\mathcal{L}^4) = \theta_2$	6	$H^0(\mathcal{L}^{12}) = 1 + \psi + \zeta_2 + \theta_2$	22
$H^0(\mathcal{L}^5) = \zeta_1$	8	$H^0(\mathcal{L}^{13}) = \zeta_1 + \zeta_- + \theta_1 + \theta_3$	24
$H^0(\mathcal{L}^6) = \psi + \theta_-$	10	$H^0(\mathcal{L}^{14}) = \psi + 2 \cdot \zeta_2 + \theta_+$	26
$H^0(\mathcal{L}^7) = \zeta_1 + \zeta_+$	12	$H^0(\mathcal{L}^{15}) = \zeta_1 + \zeta^+ + \zeta^- + \theta_1 + \theta_3$	28
$H^0(\mathcal{L}^8) = \zeta_2 + \theta_2$	14	$H^0(\mathcal{L}^{16}) = \psi + \zeta_2 + 2\theta_2 + \theta_+$	30
$H^0(\mathcal{L}^9) = \zeta^+ + \theta_1 + \theta_3$	16	$\vdots$	

(Uit Riemann-Roch volgt overigens direct:

$$\dim H^0(\mathcal{L}^k) = 2k - 2 \quad k \geq 3 \text{ en } H^0(\mathcal{L}^2) = 3)$$

§ 6.4. De p-exponenten.

Net als in II § bepalen we nu de exponenten van de irreducibele representaties, ~~des~~ de graden waarin deze voorkomen, gerekend modulo een parameter systeem, waarvoor we $\{\phi_6, \phi_{14}\}$ nemen.

Het resultaat is:

representatie	exponenten.															
1	0 21															
4	3 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 18															
3 ₂	4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17															
θ ₂	2 4 6 8 9 10 11 12 13 15 17 19															
θ ₊	1 8 9 11 16 18															
θ ₋	3 5 10 12 13 20															
3 ₁	5 7 11 13 15 17 19 21 21 23 25 27 29 31 35 37															
θ ₁ , θ ₃	9 11 13 15 17 19 23 25 27 29 31 33															
3 ₊	7 9 15 21 23 25 29 39															
3 ₋	3 13 17 19 21 27 33 35															

Merk op dat we, om dezelfde reden als in II §, weer wederkerende F polynomen hebben: $T^{42} \bar{F}_p(\frac{1}{T}) = \bar{F}_p(T)$

Nemen we weer secties in de laagste graden dan krijgen we j-polynomen van de volgende graden

	1	4	3 ₂	θ ₂	θ ₊	θ ₋	3 ₁	θ ₁	θ ₃	3 ₊	3 ₋
deg j _p :	0	48	56	39	18	18	54	42	42	52	52

Elk van deze polynomen zou $\neq 0$ kunnen zijn, d.w.z. er bestaan invarianten van de benuste graden, die geen ϕ_4 bevatten. Slechts in enkele gevallen zou de j , als $\neq 0$, door z'n graad ook bepaald worden.

Zolang we niet weten of deze polynomen $\neq 0$ zijn of niet, is het zeer speculatief om iets te bewering over de ligging van de corresponderende divisoren op $\tilde{X}$.

§ 7. Slot opmerkingen.

We hebben in §1 gezien dat we voor elke normale quasi-homogene oppervlakte singulariteit j -polynomen kunnen definiëren, wanneer we een voorstelling in de vorm $\text{Spec}(\oplus H^0(\mathcal{O}_Y, \mathcal{L}^k))^G$ hebben.

De wens, die in II § 4 al werd uitgesproken, om criteria te vinden die garanderen dat $j_p \neq 0$ wordt nu nog sterker gevoeld. Het vervelende is dat dit namelijk in voorbeelden uit te rekenen is, in ieder geval niet door mij.

Voor $SL_2(7)$ ~~kan~~ is het mogelijk gebleven om de hele ring $\oplus_n H^0(Y(7), \mathcal{L}^n)$ als $SL_2(7)$ -modulus in handen te krijgen. Of men met dezelfde methode dit zelfde kan bereiken voor $\oplus_n H^0(Y(p), \mathcal{L}^n)$ is zeer twijfelachtig; men heeft waarschijnlijk meer intelligente rekenmethoden nodig.
